С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым Жаршысы (**пәнаралық) // **Вестник Науки** Казахского агротехнического университета имени С. Сейфуллина (междисциплинарный). - 2015. – № 3(86). - С.93-100

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ И РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Тилепиев М.Ш., Уразмагамбетова Э.У., Грипп Е.А.

Аннотация

В этой работе исследованы полуэволюционные системы и их аппроксимации эволюционными, которые содержат малые параметры при производных во времени. Текущая задача приведена к решению простейшей параболо - эллиптической системы для метода слабой аппроксимации. При этом было изучено влияние малого параметра ε при производной по времени на сходимость решения расщепленной задачи к решению исходной. Также были определены оценки для производных по пространственным переменным.

В результате исследования была получена оценка скорости сходимости решений данной задачи к решению исходной задачи при стремлении к нулю параметра расщепления.

Ключевые слова: эволюционные системы, параболо - эллиптические системы, аппроксимация, метод слабой аппроксимации, приближенное решение.

В работах [1, 2] изучены системы дифференциальных уравнений составного типа и их аппроксимации системами, принадлежащими одному из хорошо изученных типов. В частности, исследованы полуэволюционные системы и их аппроксимации эволюционными, содержащие малые параметры при производных во времени. Для решения эволюционных систем различных типов имеется много эффективных методов, в частности, метод дробных шагов [3]. Встает вопрос, как влияет малый параметр ε при производной по времени на сходимость решения расщепленной задачи к решению исходной. В данном случае этот вопрос рассматривается в случае простейшей параболо - эллиптической системы для метода слабой аппроксимации.

Пусть T, l_i - заданные положительные постоянные $i=1,2$, $\Omega=\{x=(x_1,x_2)|\ 0<x_i<l_i, i=1,2\}$ прямоугольник в пространстве R^2, $Q_{(t_1,t_2)}=\Omega\times(t_1,t_2)$, $Q_{[t_1,t_2]}=\Omega\times[t_1,t_2]$.

Рассмотрим в $Q_{[0,T]}$ полуэволюционную систему уравнений:

$$0=a_{11}\Delta u_1+a_{12}\Delta u_2+b_{11}u_1+b_{12}u_2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_{21}\Delta u_1 + a_{22}\Delta u_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2, \tag{1}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ - положительно определенные матрицы с постоянными коэффициентами, $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha_0\xi^2$, $\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\xi_i\xi_j \leq \beta\xi^2$, $\forall \xi \in R^2$, α, β - положительные постоянные, $u = (u_1, u_2)$ - искомый вектор. Поставим для системы первую краевую задачу с однородными граничными условиями

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

т.е.

$$u\big|_{\substack{x_1=0,\ x_2=0\\ x_1=l_1,\ x_2=l_2}} = u(0, x_2, t) = u(l_1, x_2, t) = u(x_1, 0, t) = u(x_1, l_2, t) = 0 \tag{2}$$

и начальными данными

$$u_2\big|_{t=0} = \varphi_2. \tag{3}$$

Из (1) - (3) найдем $u_1\big|_{t=0} = \varphi_1(x_1, x_2)$ как решение задачи Дирихле

$$a_{11}\Delta\varphi_1 = -a_{12}\Delta\varphi_2 - b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2, \tag{4}$$
$$\varphi_1\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Аппроксимируем систему (1) эволюционной системой

$$\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_{11}\Delta u_1 + a_{12}\Delta u_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \quad \varepsilon > 0,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_{21}\Delta u_1 + a_{22}\Delta u_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \tag{5}$$

содержащей малый параметр $\varepsilon > 0$ при производной по времени. Рассмотрим для системы (5) однородные краевые условия (2) и начальные данные

$$u\big|_{t=0} = \varphi, \tag{6}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, φ_1 - произвольно заданная функция, φ_2 - решение задачи (4).

Согласно методу слабой аппроксимации расщепим задачу (5), (3), (6) на одномерные задачи:

$$0{,}5\varepsilon\frac{\partial u_1^\tau}{\partial t}=a_{11}\frac{\partial^2 u_1^\tau}{\partial x_1^2}+a_{12}\frac{\partial^2 u_2^\tau}{\partial x_1^2}+b_{11}u_1^\tau+b_{12}u_2^\tau,$$

$$0{,}5\frac{\partial u_2^\tau}{\partial t}=a_{21}\frac{\partial^2 u_1^\tau}{\partial x_1^2}+a_{22}\frac{\partial^2 u_2^\tau}{\partial x_1^2}+b_{21}u_1^\tau+b_{22}u_2^\tau,\qquad n\tau<t\le\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau, \tag{7}$$

$$0{,}5\varepsilon\frac{\partial u_1^\tau}{\partial t}=a_{11}\frac{\partial^2 u_1^\tau}{\partial x_2^2}+a_{12}\frac{\partial^2 u_2^\tau}{\partial x_2^2},$$

$$0{,}5\frac{\partial u_2^\tau}{\partial t}=a_{21}\frac{\partial^2 u_1^\tau}{\partial x_2^2}+a_{22}\frac{\partial^2 u_2^\tau}{\partial x_2^2},\qquad (n+1/2)\tau<t\le(n+1)\tau, \tag{8}$$

$$u^\tau\big|_{t=0}=\varphi,\quad u^\tau\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{9}$$

Здесь $n=0,1,\dots N-1$; $N\tau=T$. На каждом дробном шаге начальные данные берутся с предыдущего дробного шага:

$$u^\tau\left((n+j/2)\tau+0\right)=u^\tau\left((n+j/2)\tau\right),\ j=0,1\ . \tag{10}$$

Наша задача: оценить норму разности $u^{\varepsilon,\tau}-u$ через параметры τ и ε ($u^{\varepsilon,\tau}$ -решение задачи (7) - (9), u -решение задачи (1)-(3)).

Пусть

$$\varphi_k\in W_2^3(\Omega),\ k=1,2. \tag{11}$$

В силу $\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\alpha_0\xi^2$, $\xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2$, $\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}\xi_i\xi_j\le\beta\xi^2$, $\forall\xi\in R^2$, α, β - положительные постоянные, имеем соотношения:

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-b_{ij}u_iu_j\right)dx\ge-\beta\|u\|^2+\alpha\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|^2, \tag{12}$$

для любого $u\in\left(W_2^1(\Omega)\right)^2$, $\alpha,\beta=\mathrm{const}>0$.

Здесь $\|u_2\|_\Omega=\left(\int_\Omega u_2^2dx\right)^{1/2}$ - норма в пространстве $L_2(\Omega)$, $\left(W_2^1(\Omega)\right)^2=W_2^1(\Omega)\times W_2^1(\Omega)$.

Ниже мы получим равномерные по τ априорные оценки решения $u_{2,\tau}$. Для удобства в обозначениях индекс ε опустим, например, будем писать u^τ вместо $u^{\varepsilon,\tau}$.

Рассмотрим первый дробный шаг нулевого шага ($n=0$). Умножим систему (7) на вектор $u^\tau e^{-kt}$, $k=const>0$, и проинтегрируем результат по области $Q_{(0,t)}$, $0<t\le\tau/2$. Учитывая соотношение (12), получим неравенство

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\left\|u_1^\tau(t)\right\|_\Omega^2 e^{-kt} - \varepsilon\left\|\varphi_1\right\|_\Omega^2 + \left\|u_2^\tau(t)\right\|_\Omega^2 e^{-kt} - \left\|\varphi_2\right\|_\Omega^2 + \varepsilon k\int_0^t \left\|u_2^\tau(\theta)\right\|_\Omega^2 e^{-k\theta}d\theta + \\
&+ k\int_0^t \left\|u_1^\tau(\theta)\right\|_\Omega^2 e^{-k\theta}d\theta - \beta\int_0^t \left\|u_1^\tau(\theta)\right\|_\Omega^2 e^{-k\theta}d\theta \le 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

При $k \ge 4\beta$ из (13) следует, что

$$
\varepsilon\left\|u_1^\tau(t)\right\|_\Omega^2 + \left\|u_2^\tau(t)\right\|_\Omega^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\varphi_1\right\|^2 + \left\|\varphi_2\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0<t<\tau/2. \tag{14}
$$

На втором дробном шаге $(n=0,\ t\in(\tau/2,\tau))$ решаем систему (8). Умножим (8) на $u^\tau e^{-k(t-\tau/2)}$ и проинтегрируем результат по области $Q_{(\tau/2,t)}$, $\tau/2<t\le\tau$.

Аналогично (14) получим неравенство

$$
\varepsilon\left\|u_1^\tau(t)\right\|_\Omega^2 + \left\|u_2^\tau(t)\right\|_\Omega^2 \le \left\{\varepsilon\left\|u_1^\tau(\tau/2)\right\|^2 + \left\|u_2^\tau(\tau/2)\right\|^2\right\}e^{k(t-\tau/2)},\ \tau/2<t\le\tau. \tag{15}
$$

Отсюда и из (14) имеем

$$
\varepsilon\left\|u_1^\tau(t)\right\|_\Omega^2 + \left\|u_2^\tau(t)\right\|_\Omega^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\varphi_1\right\|^2 + \left\|\varphi_2\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0<t\le\tau \tag{16}
$$

Учитывая (14),(16) и повторяя наши рассуждения на первом $(n=1)$, втором $(n=2)$ и последующих целых $\forall n$ шагах, получим для $t\in(0,T]$ оценку

$$
\varepsilon\left\|u_1^\tau(t)\right\|^2 + \left\|u_2^\tau(t)\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\varphi_1\right\|^2 + \left\|\varphi_2\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0<t\le T. \tag{17}
$$

Выведем оценку первых производных по пространственным переменным. Рассмотрим первый дробный шаг при $n=0$. Умножим систему (7) на вектор $\frac{\partial u^\tau}{\partial x_1}e^{-kt}$, $k=const>0$. После интегрирования по области $Q_{(0,t)}$, $t\in(0,\tau/2]$, получим неравенство

$$
\begin{aligned}
&0{,}5\varepsilon\left\|u_1^\tau(t)\right\|^2 e^{-kt} - 0{,}5\varepsilon\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right\|^2 + 0{,}5\left\|u_2^\tau(t)\right\|^2 e^{-kt} - 0{,}5\left\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right\|^2 + \\
&+ 0{,}5\varepsilon k\int_0^t\left\|\frac{\partial u_1^\tau(\theta)}{\partial x_1}\right\|^2 e^{-k\theta}d\theta + 0{,}5k\int_0^t\left\|\frac{\partial u_2^\tau(\theta)}{\partial x_1}\right\|^2 e^{-k\theta}d\theta + \\
&+ \int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^2\left(a_{ij}\frac{\partial^2 u_i^\tau}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u_j^\tau}{\partial x_1^2} - b_{ij}\frac{\partial u_i^\tau}{\partial x_1}\frac{\partial u_j^\tau}{\partial x_1}\right)e^{-k\theta}dxd\theta \le 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Вследствие условия (12)

$$
\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^2\left(a_{ij}\frac{\partial^2 u_i^\tau}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u_j^\tau}{\partial x_1^2} - b_{ij}\frac{\partial u_i^\tau}{\partial x_1}\frac{\partial u_j^\tau}{\partial x_1}\right)e^{-k\theta}dxd\theta \ge -\beta\int_0^t\left\|\frac{\partial u_2^\tau}{\partial x_1}\right\|^2 e^{-k\theta}d\theta.
$$

Поэтому, выбрав k достаточно большим $(k \geq 2\beta)$, из (18) получим оценку

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(t)}{\partial x_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(t)}{\partial x_1}\right\|^2 \leq \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right\|^2\right\} e^{kt},\ 0<t\leq \tau/2. \tag{19}$$

Для оценки производной $\dfrac{\partial u^{\tau}}{\partial x_2}$ на первом дробном шаге продифференцируем систему (17) по x_2. Функция $v^{\tau}=\dfrac{\partial u^{\tau}}{\partial x_2}$, рассматриваемая как функция переменной x_1, удовлетворяет однородным краевым условиям $v^{\tau}(t,0,x_2)=v^{\tau}(t,l_1,x_2)=0$ и системе (17). Следовательно, аналогично оценке (16), получим оценку

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(t)}{\partial x_2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(t)}{\partial x_2}\right\|^2 \leq \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right\|^2\right\} e^{kt},\ 0<t\leq \tau/2. \tag{20}$$

Рассматривая на втором дробном шаге систему уравнений (8) и повторяя предыдущие рассуждения, получим следующее соотношение:

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(t)}{\partial x_i}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(t)}{\partial x_i}\right\|^2 \leq \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(\tau/2)}{\partial x_i}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(\tau/2)}{\partial x_i}\right\|^2\right\} e^{k(t-\tau/2)},\ \tau/2<t\leq \tau,\ i=1,2.$$

Из двух последних неравенств при $t\in(0,\tau]$ следует оценка

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_1^{\tau}(t)}{\partial x_i}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u_2^{\tau}(t)}{\partial x_i}\right\|^2 \leq \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right\|^2+\left\|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\right\|^2\right\} e^{kt}, i=1,2. \tag{21}$$

Повторяя наши рассуждения на первом, втором и всех последующих целых шагах, получим оценку (19) уже на всем отрезке $[0,T]$.

Ниже мы получим оценку производной $\dfrac{\partial^2 u^{\tau}}{\partial t\partial x_i}$,которые выражаются через величины, равномерно ограниченные по τ.

Умножим систему (7) на вектор $\dfrac{\partial^6 u^{\tau}}{\partial x_1^{\,6}}e^{-kt}$, $t\in(0,\tau/2]$, и проинтегрируем результат по области $Q_{(0,t)}$. Трижды интегрируя по частям первый и третий члены и дважды – второй член, получим:

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u_1^{\tau}(t)}{\partial x_1^{\,2}}\right\|^2+\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u_2^{\tau}(t)}{\partial x_1^{\,2}}\right\|^2 \leq \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^{\,2}}\right\|^2+\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^{\,2}}\right\|^2\right\} e^{kt},\ 0<t\leq \tau/2.$$

Дифференцируя систему (7) по x_2, умножая результат дифференцирования на $\frac{\partial^5 u^\tau}{\partial x_2 \partial x_1^4} e^{-kt}$, $t \in (0, \tau/2)$, и интегрируя произведение по области $Q_{(0,t)}$, получим:

$$\sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1^\tau(t)}{\partial x_1^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_2^\tau(t)}{\partial x_1^2} \right\|^2 \le \left\{ \sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} \right\|^2 \right\} e^{kt}, \ 0 < t \le \tau/2. \qquad (22)$$

Дважды дифференцируя систему (7) по x_2, умножая результат на $\frac{\partial^4 u^\tau}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} e^{-kt}$, $t \in (0, \tau/2)$, и интегрируя произведение по частям, получим:

$$\sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1^\tau(t)}{\partial x_2^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_2^\tau(t)}{\partial x_2^2} \right\|^2 \le \left\{ \sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \right\|^2 \right\} e^{kt}, \ 0 < t \le \tau/2. \qquad (23)$$

Трижды дифференцируя систему (7) по x_2, умножая результат на $\frac{\partial^3 u^\tau}{\partial x_2^3} e^{-kt}$, $t \in (0, \tau/2)$, и интегрируя произведение по частям, получим:

$$\sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1^\tau(t)}{\partial x_2^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_2^\tau(t)}{\partial x_2^2} \right\|^2 \le \left\{ \sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \right\|^2 \right\} e^{kt}, \ 0 < t \le \tau/2. \qquad (24)$$

Замечание 1. Легко заметить, что производные вида $\frac{\partial^k}{\partial x_2^k} \frac{\partial^{2m} u^\tau}{\partial x_1^{2m}}$, $k \ge 0$, $m \ge 0$ - целое, обращается в нуль на отрезках границы области Ω при $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$, только при $m = 0$, а произведение вида $\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \frac{\partial^{2m} u^\tau}{\partial x_1^{2m}}$ - при $x_2 = 0$ и $x_2 = l_2$. Этот факт позволяет проводить интегрирование по частям во всех рассматриваемых случаях.

Рассматривая на втором дробном шаге систему (8), аналогично тому, как были получены соотношения (21) - (24) (но в другой последовательности, так как система (8) содержит производные по x_2 и меняются местами переменные x_1, x_2), получим соотношение

$$\sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_1^\tau(t)}{\partial x_j^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_2^\tau(t)}{\partial x_j^2} \right\|^2 \le \left\{ \sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_1^\tau(\tau/2)}{\partial x_j^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_2^\tau(\tau/2)}{\partial x_j^2} \right\|^2 \right\} e^{k(t-\tau/2)}, \qquad (25)$$

$\tau/2 < t \le \tau$, $i, j = 1,2$.

Из соотношений (21) - (25) следует, что

$$\sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_1^\tau(t)}{\partial x_j^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_2^\tau(t)}{\partial x_j^2} \right\|^2 \le \left\{ \sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_j^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_j^2} \right\|^2 \right\} e^{kt}. \qquad (26)$$

Повторив наши рассуждения на первом, втором и всех последующих шагах, получим оценку (26) уже для всех $t\in[0,T]$.

Аналогично выводится оценка

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u_1^\tau(t)}{\partial x_i^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^2 u_2^\tau(t)}{\partial x_i^2}\right\|^2 \le \left\{\varepsilon\left\|\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_i^2}\right\|^2\right\}e^{kt},\ 0\le t\le T,\ i=1,2. \tag{27}$$

Из соотношений (17), (20), (26), (27) заключаем, что

$$\begin{gathered}\sqrt{\varepsilon}\left\|u_1^\tau(t)\right\|+\left\|u_2^\tau(t)\right\|+\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial u_1^\tau(t)}{\partial x_i}\right\|+\left\|\frac{\partial u_2^\tau(t)}{\partial x_i}\right\|+\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial^2 u_1^\tau(t)}{\partial x_i^2}\right\|+\left\|\frac{\partial^2 u_2^\tau(t)}{\partial x_i^2}\right\|+\\ +\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_1^\tau(t)}{\partial x_j^2}\right\|+\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_2^\tau(t)}{\partial x_j^2}\right\|\le C,\ 0\le t\le T,\ i=1,2\end{gathered} \tag{28}$$

$$C(\sqrt{\varepsilon}\|\varphi_1\|_{W_2^3}+\|\varphi_2\|_{W_2^3})\le C\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)\le C_1,\quad 0<\varepsilon\le 1.$$

Здесь (и ниже) постоянная C не зависит от ε и τ, лишь от α, β и начальных данных φ.

Из уравнений (7), (8) и соотношений (28) имеем:

$$\left\|\frac{\partial u^\tau(t)}{\partial t}\right\|+\left\|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u^\tau(t)}{\partial x_j}\right\|\le\frac{C}{\varepsilon^{3/2}},\ j=1,2. \tag{29}$$

Запишем систему (7), (8) в виде

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t}=\alpha_{1,\tau}A\frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_1^2}+\alpha_{1,\tau}Bu^\tau+\alpha_{2,\tau}A\frac{\partial^2 u^\tau}{\partial x_2^2}, \tag{30}$$

где $\alpha_{1,\tau}(t)\equiv 2,\ \alpha_{2,\tau}(t)\equiv 0$ на первых дробных шагах (при $t\in[n\tau,(n+1/2)\tau]$), $n=0,1,\dots,N-1$.

Рассмотрим средние функции u_{cp}^τ:

$$u_{cp}^\tau(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}u^\tau(\theta)d\theta=\left(\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}u_1^\tau(\theta)d\theta,\ \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}u_2^\tau(\theta)d\theta\right)=\left(u_{1,cp}^\tau(t),\ u_{2,cp}^\tau(t)\right). \tag{31}$$

Осредняя систему (30) (интегрируя обе части (30) по отрезку $[t,t+\tau]$ и деля результат на τ), находим, что вектор u_{cp}^τ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial\tilde{u}_{cp}^\tau(t)}{\partial t}=A\Delta u_{cp}^\tau(t)+Bu_{cp}^\tau(t)+F_\tau(t), \tag{32}$$

где

$$\tilde u_{cp}^{\tau}=\left(\varepsilon u_{1,cp}^{\tau},u_{2,cp}^{\tau}\right),\qquad F_\tau(t)=F_\tau\left(t,u^\tau\right)=$$
$$=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\left\{\alpha_{1,\tau}(\theta)\left[\frac{\partial^2 u^\tau(\theta)}{\partial x_1^2}+Bu^\tau(\theta)\right]-A\frac{\partial^2 u_{cp}^{\tau}(t)}{\partial x_1^2}-Bu_{cp}^{\tau}(t)\right\}d\theta+ \tag{33}$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\left\{\alpha_{2,\tau}(\theta)A\frac{\partial^2 u^\tau(\theta)}{\partial x_2^2}-A\frac{\partial^2 u_{cp}^{\tau}(t)}{\partial x_2^2}\right\}d\theta.$$

Нетрудно показать, что используя вид функции F_τ, формулу конечных приращений Лагранжа получить оценку

$$\left\|F_\tau\right\|_{\left(L_\infty(0,T;W_2^{-1}(\Omega))\right)^2}\le\frac{C\tau}{\varepsilon^{3/2}}, \tag{34}$$

где $W_2^{-1}(\Omega)$ - пространство, сопряженное к $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим теперь решение задачи (7)-(9) через $u^{\varepsilon,\tau}$, а решение задачи (5), (3), (6) – через u^{ε}. Тогда вектор $w=u_{cp}^{\varepsilon,\tau}-u^{\varepsilon}$ удовлетворяет системе

$$\frac{\partial w}{\partial t}=A\,\Delta w+B\,w-F_\tau, \tag{35}$$

с однородными граничными условиями и начальными данными $w(0)=u_{cp}^{\varepsilon,\tau}(0)-\varphi$, удовлетворяющими вследствие (29) неравенству

$$\left\|u_{cp}^{\varepsilon,\tau}(0)-\varphi\right\|\le C\frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}. \tag{36}$$

В силу (12), (34), (36) для решения w уравнения (35) имеет место оценка

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|u_{1,cp}^{\varepsilon,\tau}-u_1^{\varepsilon}\right\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|u_{2,cp}^{\varepsilon,\tau}-u_2^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|u_{cp}^{\varepsilon,\tau}-u^{\varepsilon}\right\|_{(L_2(0,T;W_2^1(\Omega)))^2}\le C\frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}. \tag{37}$$

Так как вследствие (29), (31)

$$\left\|u_{cp}^{\varepsilon,\tau}(t)-u^{\varepsilon,\tau}\right\|_{\Omega}+\left\|\frac{\partial u_{cp}^{\varepsilon,\tau}}{\partial x}-\frac{\partial u^{\varepsilon,\tau}(t)}{\partial x}\right\|_{\Omega}\le C\frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}, \tag{38}$$

то по неравенству треугольника из (37), (38) следует оценка

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|u_1^{\varepsilon,\tau}-u_1^{\varepsilon}\right\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|u_2^{\varepsilon,\tau}-u_2^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|u^{\varepsilon,\tau}-u^{\varepsilon}\right\|_{(L_2(0,T;W_2^1(\Omega)))^2}\le C\frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}. \tag{39}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1 Пусть $\varphi_k\in W_2^3(\Omega)$, $k=1,2$ и коэффициенты системы уравнений (1) удовлетворяют условиям $\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\alpha_0\xi^2$, $\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}\xi_i\xi_j\le\beta\xi^2$, $\forall\xi\in R^2$, α, β -

положительные постоянные. Тогда имеет место оценка (39), где u^{ε} - решение задачи (5), (3), (6), $u^{\varepsilon,\tau}$ - решение задачи (7)- (9) и постоянная C не зависит от ε, τ, а лишь от $\alpha, \beta, \|\varphi\|_{W_2^3(\Omega)}$.

Замечание 2 При выполнении условия (11) решения рассмотренных задач обладает гладкостью, для законности проведенных выше преобразований.

Рассмотрим теперь задачу (1)-(3). Легко видеть, что она эквивалентна задаче (1), (2) с начальными данными (6) при условии их согласования

$$a_{11}\Delta\varphi_1 + a_{12}\Delta\varphi_2 + b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 = 0. \qquad (40)$$

Здесь функция φ_1 определяется из первого уравнения системы (1.83) при $t \to 0$. Из результатов работ $[4,5]$ следует, что при выполнении условий (11), (12), (40) имеет место оценка

$$\left\|u_2 - u_2^{\varepsilon}\right\|_{C(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|u - u^{\varepsilon}\right\|_{(L_2(0,T;W_2^1(\Omega)))^2} \le C\cdot\varepsilon, \qquad (41)$$

где u - решение задачи (1) – (3) класса $\left(W_2^1\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)\right)^2$.

Из соотношений (39), (41) следует, что

$$\left\|u_2 - u_2^{\varepsilon,\tau}\right\|_{C(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|u - u^{\varepsilon,\tau}\right\|_{(L_2(0,T;W_2^1(\Omega)))^2} \le C\cdot\left(\varepsilon + \frac{\tau}{\varepsilon^{3/2}}\right) \qquad (42)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2 Пусть выполняются соотношения (11), (12) и условия согласования (40). Тогда имеет место оценка (42).

Список литературы

1 Кучер Н.А. Об обосновании схем расщепления, используемых в методе крупных частиц // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1988. -Вып. 85. – С. 1-36.

2 Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. – Красноярск: Красноярский госуниверситет, 1999. – 236 с.

3 Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.

4 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.

5 Джаикбаев А.М., Исаев С.А. О параболической аппроксимации диффузионной модели неооднородной жидкости // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1990. – Т. 4(21), № 6. – С. 27-40.

6 Серегин Г.А. О локальной регулярности подходящих слабых решений уравнений Навье-Стокса. УМН, 2007, 62:3(375) с.149-168

7 Bektemesov M.A., Mukhametzhanov S.T. Inverse Problems of the a filtration. ABSTRACTS of the International Sympo-sium on Inverse Problems in Engineering

Mechanics 2003: 18–21 February 2003, Nagano City, JAPAN. Nagano City, 2003. PP. 151–152.5.

8 Abylkairov U.U., Mukhametzhanov S.T. and Khompysh Kh.. On the e- approximation for the Modified eguations of the heat convection Universal Jornal of Mathematics and Mathematical Sciences Pushpa Publishing Allahabad, India. Volume 5, Number 1, 2014, Pages 37-51.

9 A. Meirmanov, N. Erygina, S. Mukhametzhanov.Mathematical model of a liquid filtration from reservoirs-Electronic Journal of Dierential Equations, Vol. 2014 (2014), No. 49, pp. 1-13.

Түйін

Бұл жұмыста жартылай эволюциалық жүйе және оның құрамында уақыт бойынша туындының алдында өте аз өлшемді параметрі бар эволюциалық жүйеге жуықтауы зерттелген. Осы есеп қарапайым параболалық-эллипстік жүйесінің шешімін жәй жуықтау әдісімен шешуге келтірілген. Сонымен қатар, өте аз өлшемді e параметрі бар ыдыратылған есептің шешімінің берілген есептің шешіміне жуықталуына әсері қарастырылып, кеңістік айнымалылары бойынша алынған арқылы туындыларының бағалары анықталған.

Зерттеудің қортындысында ыдырату параметрі нөлге ұмтылғандағы есептің шешімінің берілген есептің шешіміне ыдырату параметрі нөлге ұмтылған жағдайда жинақталу жылдамдығы алынған.

Summury

In this paper the semi-evolutionary systems and their approximations with small parameters on the derivatives over time are investigated. This problem is reduced to solving simple parabolic - elliptic system by the method of weak approximation. Thus the influence of small parameter e at the derivative with respect to time on the convergence of the solution of the split problem to the solution of the original problem is studied. Also estimates for derivatives are determined by spatial variables.

As a result of research estimates of the rate of convergence of the problem solutions to the solution of the original problem as splitting parameter tends to zero are obtained.