С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым жаршысы**(пәнаралық) = **Вестник науки** Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина (междисциплинарный). – 2015. - №2 (85). –С. 101-106

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МЕТОДОМ СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Тилепиев М.Ш., Уразмагамбетова Э.У., Грипп Е.А.

Аннотация

Работа посвящена исследованию одной стационарной задачи электродинамики. Рассматриваемая задача изучена в двухгранной области. Относительно искомой функции определено соответствующее пространство гладкости. Применяя неравенство треугольника и формулу Лагранжа о конечных приращениях показана равностепенная непрерывность семейства производных. Задачи электродинамики в областях с негладкими границами решены методом слабой аппроксимации. Получены оценки их решений в весовых соболевских пространствах. Показано, что обобщенные решения задач типа Дирихле для стационарной и нестационарной систем уравнений Максвелла в областях с негладкими границами (угол на плоскости и двухгранник – в трёхмерном пространстве) принадлежат некоторым весовым пространствам H_{μ}^{k} и $W_{2,\mu}^{k}$.

Ключевые слова: электродинамика, метод слабой аппроксимации, приближенное решение.

В двуграннике D_θ рассмотрим стационарную систему уравнений Максвелла для определения вектор функций магнитной и электрической напряженностей $H(x,t)$ *и* $E(x,t)$:

$$\begin{aligned} rot\vec{H} - k_1\vec{E} = \vec{f}_1(x), \quad div\vec{E} = \rho(x), \\ rot\vec{E} + k_2\vec{H} = \vec{f}_2(x), \quad div\vec{H} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

с краевым условием

$$\vec{E}_\tau\Big|_{x\in\partial D_\theta} = 0. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения:

$d_\theta \subset R^2$ бесконечный угол на плоскости, задаваемый в полярных координатах $\rho,\ \varphi$ соотношениями: $\rho > 0,\ 0 < \varphi < \theta;\ \theta \in (0,2\pi)$- раствор угла, γ_0 u γ_1 его стороны: $\varphi = 0,\ \rho > 0\ u\ \varphi = \theta,\ \rho > 0.$

$D_\theta = d_\theta \times R^1$ - двухгранный угол в R^3, $\Gamma_0 = \gamma_0 \times R^1$, $\Gamma_1 = \gamma_1 \times R^1$- его грани, $M = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ - ребро. Точка $x = (x', x_3),\ где\ x' = (x_1, x_2),\ \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$

Определим весовые пространства С.Л. Соболева $H_\mu^k(D_\theta)$ и $W_{2,\mu}^k(D_\theta)$ как пространства функций с нормами

$$\|u\|^2_{W^k_{2,\mu}(D_\theta)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_{D_\theta} |x'|^{2\mu} \left|D^\alpha u\right|^2 dx,$$

$$\|u\|^2_{H^k_{\mu}(D_\theta)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_{D_\theta} |x'|^{2\mu-2k+2|\alpha|} \left|D^\alpha u\right|^2 dx \cdot$$

(производные понимаются как обобщенные в смысле С.Л.Соболева)[1].

Исключив вектор $\vec{H}(x)$ из системы (1) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} &(-\Delta + k_1 k_2)\vec{E}(x) = -grad\rho + rot\vec{f}_2 - k_2 \vec{f}_1, \\ &div\vec{E} = \rho(x). \end{aligned} \tag{1'}$$

Преобразование Фурье по переменной x_3 переводит в следующую задачу:

$$\begin{aligned} &(-\Delta' + k_1 k_2 + \xi^2)\tilde{E}_j = -\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x_j} + \left(rot\tilde{\vec{f}}_2\right)_j - k_2\left(\tilde{\vec{f}}_1\right)_j, \quad j = 1,2 \\ &-\Delta'\tilde{E}_3 + (k_1 k_2 + \xi^2)\tilde{E}_3 = -i\xi\tilde{\rho} + \left(rot\tilde{\vec{f}}_2\right)_3 - k_2\left(\tilde{\vec{f}}_1\right)_3, \quad x' \in d_\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\tilde{E}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\tilde{E}_2}{\partial x_2} + i\xi\tilde{E}_3 = \tilde{\rho}\ . \tag{4}$$

с краевым условием

$$\tilde{\vec{E}}_\tau(x',\xi)\Big|_{x'\in D_\theta} = 0. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{E}$ означает преобразование Фурье функции E по переменной x_3, ξ-переменная преобразования Фурье, $\xi \in R^1$. После этого из третьего уравнения системы (3) при граничных условиях (5) имеем

$$i\xi\tilde{E}_3\Big|_{x'\in\partial D_\theta} = \tilde{\rho}(x',\xi).$$

Далее исследована нестационарная задача электродинамики соответствующая задаче (3) – (5) в следующей постановке.

В области $Q_T = D_\theta \times [0,T]$ требуется найти вектор – функцию $\vec{\tilde{E}}^\varepsilon$ из уравнений

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial \tilde{E}_j^\varepsilon}{\partial t} + (-\Delta' + k_1 \cdot k_2 + \xi^2) \cdot \tilde{E}_j^\varepsilon = -\frac{\partial \tilde{\rho}^\varepsilon}{\partial x_j} + (rot\ \vec{\tilde{f}}_2^\varepsilon)_j - k_2(\vec{\tilde{f}}_1)_j,\ \ j = 1,2 \qquad (6)$$

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial \tilde{E}_3^\varepsilon}{\partial t} - \Delta'\tilde{E}_3^\varepsilon + (k_1 \cdot k_2 + \xi^2) \cdot \tilde{E}_3^\varepsilon = -i\xi\tilde{\rho}^\varepsilon + (rot\ \vec{\tilde{f}}_2^\varepsilon)_3 - k_2 \cdot (\vec{\tilde{f}}_1^\varepsilon)_3,\ \ x' \in d_\theta$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{E}_2^\varepsilon}{\partial x_2} + i \cdot \xi \cdot \tilde{E}_3^\varepsilon = \tilde{\rho}^\varepsilon \qquad (7)$$

с начально – краевыми условиями:

$$\tilde{E}_j^\varepsilon\Big|_{t=0} = \tilde{E}_{0j}^\varepsilon(x), \quad \forall x \in D_\theta, \quad j = 1,2,3,$$

$$\vec{\tilde{E}}_\tau^\varepsilon(x',\xi)\Big|_{x'\in\partial D_\theta} = 0. \qquad (8)$$

где $\varepsilon > 0 -$ положительное число. Для удобства вводятся функций

$$\vec{F}_i^\varepsilon(x_j, t), \quad i = 1,2,$$

$$\vec{F}_j^\varepsilon = -\frac{\partial \tilde{\rho}^\varepsilon}{\partial x_j} + (rot\ \vec{\tilde{f}}_2^{\,\varepsilon})_j - k_2 \cdot (\vec{\tilde{f}}_1^{\,\varepsilon})_j, \quad j = 1,2,$$

$$\vec{F}_3^\varepsilon = -i\xi\tilde{\rho}^\varepsilon + (rot\ \vec{\tilde{f}}_2^{\,\varepsilon})_3 - k_2 \cdot (\vec{\tilde{f}}_1^{\,\varepsilon})_3, \quad x' \in d_\theta,$$

а также параметр $\mu = k_1 \cdot k_2 + \xi^2 > 0$ и $\tilde{t} = \varepsilon \cdot t.$ Тогда систему уравнений (6) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \tilde{E}_j^{\varepsilon}}{\partial \tilde{t}} - \Delta' \tilde{E}_j^{\varepsilon} + \mu \cdot \tilde{E}_j^{\varepsilon} = \vec{F}_j^{\varepsilon}, \quad j = 1,2,3. \qquad (6')$$

Уравнение $(6')$ с помощью замены $\tilde{E}_j^{\varepsilon} = \ell^{-\mu\cdot\tilde{t}} \cdot u_j$ приводится более удобному виду, а именно:

$$\frac{\partial u_j^{\varepsilon}}{\partial \tilde{t}} - \Delta' u_j^{\varepsilon} = \tilde{F}_j^{\varepsilon}, \quad j = 1,2,3. \qquad (9)$$

где $\tilde{F}_j^{\varepsilon} = \ell^{\mu\cdot\tilde{t}} \cdot \vec{F}_j^{\varepsilon}$-вектор – функция. Далее, рассмотрим слабую аппроксимацию задачи (9), (7) и (8), к которой мы свели задачу (6)-(8)

$$\frac{\partial u_j^{\varepsilon,\tau}}{\partial \tilde{t}} = 3 \cdot \frac{\partial^2 u_j^{\varepsilon,\tau}}{\partial x_1^2}, \quad n \cdot \tau < \tilde{t} < \left(n + \tfrac{1}{3}\right) \cdot \tau, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial u_j^{\varepsilon,\tau}}{\partial \tilde{t}} = 3 \cdot \frac{\partial^2 u_j^{\varepsilon,\tau}}{\partial x_2^2}, \quad (n + \tfrac{1}{3}) \cdot \tau < \tilde{t} < \left(n + \tfrac{2}{3}\right) \cdot \tau, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial u_j^{\varepsilon,\tau}}{\partial \tilde{t}} = 3 \cdot \tilde{F}_j^{\varepsilon}, \quad (n + \tfrac{2}{3}) \cdot \tau < \tilde{t} < (n+1) \cdot \tau, \qquad (12)$$

$$u_j^{\varepsilon,\tau}\Big|_{\tilde{t}=0} = u_{0j}^{\varepsilon}(x), \quad j = 1,2. \qquad (13)$$

причем в каждом временном слое считается выполненным уравнение (7). Аналогичное расщепление имеет место при j=3 [2].

Относительно начальной функции $u_{0j}^{\varepsilon}(x)$ и неоднородной части $\tilde{F}_j^{\varepsilon}$ предполагаются, что указанные функции бесконечно дифференцируемы по пространственным переменным и ограничены вместе со всеми своими производными:

$$\left|D_{x'}^{\beta} u_{0j}^{\varepsilon}(x')\right| \le K_n, \quad |\beta| = n, \quad n = 0,1,... \qquad (14)$$

$$\left|D_{x'}^{\beta} \tilde{F}_j^{\varepsilon}(x,t)\right| \le r_k, \quad |\beta| = k, \quad k = 0,1,... \qquad (15)$$

где $K_{n,}$ r_k - неотрицательные постоянные.

Рассмотрим нулевой шаг (n=0). На первом дробном шаге решается уравнение (10) с начальными данными (13). Её решение дается в явном виде по формуле Пуассона:

$$u_j^{\varepsilon,\tau}(\tilde{t},x_{1,}x_2)=\frac{1}{2\sqrt{3\pi\cdot\tilde{t}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ell^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{12\cdot\tilde{t}}}\cdot u_{0j}^{\varepsilon}(\xi_1,x_2)d\xi_{1,}\tag{16}$$

при $0<\tilde{t}\le\frac{\tau}{3}$.

На втором дробном шаге решается задача Коши для уравнения (11). Её решение даётся формулой Пуассона с начальными данными (13):

$$u_j^{\varepsilon,\tau}\left(\frac{\tau}{3},x_1,x_2\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ell^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{4\tau}}u_{0j}^{\varepsilon}(\xi_1,x_2)d\xi_{1,}\quad j=1,2$$

$$u_j^{\varepsilon,\tau}\left(\tilde{t},x_1,x_2\right)=\frac{1}{2\sqrt{3\pi(\tilde{t}-\frac{\tau}{3})}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ell^{-\frac{(x_2-\xi_2)^2}{12(\tilde{t}-\tau/3)}}u_j^{\varepsilon,\tau}(\frac{\tau}{3},x_1,\xi_2)d\xi_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi\sqrt{3\tau(\tilde{t}-\frac{\tau}{3})}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ell^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{4\tau}}\cdot\ell^{-\frac{(x_2-\xi_2)^2}{12(\tilde{t}-\tau/3)}}\cdot u_{0j}^{\varepsilon}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\,.$$

На третьем дробном шаге решается задача Коши для уравнения (12) с начальными данными (13), т.е.

$$u_j^{\varepsilon,\tau}(\frac{2\tau}{3},x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ell^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}{4\tau}}\cdot u_{0j}^{\varepsilon}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\,,\tag{17}$$

$$u_j^{\varepsilon,\tau}(\tilde{t},x_1,x_2)=u_j^{\varepsilon,\tau}(\frac{2\tau}{3},x_1,x_2)+3\int_{2\tau/3}^{\tilde{t}}\tilde{F}_j^{\varepsilon}(\theta,x)d\theta=$$

(18)

$$=3\int_{2\tau/3}^{\tilde{t}}\tilde{F}_j^{\varepsilon}(\theta,x)d\theta+\frac{1}{4\pi\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ell^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}{4\tau}}u_{0j}^{\varepsilon}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\,.$$

Таким образом, построили решение $u_j^{\varepsilon,\tau}$ задачи (10) - (13) на отрезке $[0,\tau]$. Далее строим решение на отрезке $[\tau,2\tau]$, затем – на отрезке $[2\tau,3\tau]$ и так далее [3].

Замечание 1. На первом дробном шаге x_2 рассматривается в качестве параметра, а на втором дробном шаге x_1 выступает в качестве параметра. На третьем дробном шаге обе переменные x_1 и x_2 рассматриваются как параметры. Аналогичное рассуждение имеет место при $j=3$.

Легко доказать, что решения $u_j^{\varepsilon,\tau}$ и их производные по x равномерно по τ ограничены. Последний факт следует из предположений (14) и (15). На самом деле на нулевом дробном шаге ($n=0$) и из принципа максимума для решений рассматриваемых уравнений:

$$\left|u_j^{\varepsilon,\tau}(t,x)\right| \le K_0, \tag{19}$$

где K_0 - постоянная, определяемая из (14). Из представления (18), неравенства (15) и (19) получим, что

$$\left|u_j^{\varepsilon,\tau}\left(t,x\right)\right| \le K_0 + r_0 \cdot \tau\,. \tag{20}$$

На первом дробном шаге $(n=1)$ оценка (20) преобразуется и имеет вид:

$$\left|u_j^{\varepsilon,\tau}(t,x)\right| \le K_0 + 2\cdot r_0 \cdot \tau\,.$$

Продолжая наши рассуждения, получим, что при любом $k \le N-1$:

$$\left|u_j^{\varepsilon,\tau}(t,x)\right| \le K_0 + r_0 \cdot (k+1)\cdot \tau\,.$$

Тогда в целом по времени получим:

$$\left|u_j^{\varepsilon,\tau}(t,x)\right| \le K_0 + r_0 \cdot T\,. \tag{21}$$

Для доказательства ограниченности первых производных по x_i достаточно продифференцировать задачу (10)-(13) по x_i и для $v_{i,j}^{\varepsilon,\tau} = \dfrac{\partial u_j^{\varepsilon,\tau}}{\partial x_i}$ провести аналогичные рассуждения и в результате получим, что в целом по времени имеет место оценка:

$$\left|\frac{\partial u_j^{\varepsilon,\tau}\left(t,x\right)}{\partial x_i}\right| \le K_1 + r_1 \cdot T, \quad i,j=1,2\,. \tag{22}$$

Повторяя предыдущие рассуждения для оценки производной $D_x^\beta u_j^{\varepsilon,\tau}$ получим оценки

$$\left|D_x^\beta u_j^{\varepsilon,\tau}\right| \le K_n + r_n \cdot T, \quad \left|\beta\right| = n,\ n \ge 0\,. \tag{23}$$

Применяя оператор дифференцирования $D_{x,k}^\beta$ к уравнениям (10)-(12) и учитывая оценку (23) получим равномерные оценки по τ:

$$\left|D_t D_x^\beta u_j^{\varepsilon,\tau}\right| \le L_n, \quad \left|\beta\right| = n,\ n \ge 0\,. \tag{24}$$

Из оценок (23) следует равномерная ограниченность по τ семейства производных по пространственным переменным, а из оценок вида (23), (24) – их равностепенная непрерывность по времени и по пространственным переменным. Тогда применяя неравенство треугольника и формулу Лагранжа о конечных приращениях легко показать равностепенную непрерывность семейства производных. Следовательно, по теореме Арцела множество $\{D_x^\beta u_j^{\varepsilon,\tau}\}$ компактно во множестве непрерывных функций. Исходя из последних рассуждений выберем подпоследовательность $\{u_j^{\varepsilon_k,\tau_k}\}$, сходящуюся вместе со всеми производными по x к некоторой функции u_j. Причем функция u_j непрерывна, имеет непрерывные производные любого порядка по x в силу предполагаемой гладкости на данные вида (14), (15) [4].

Таким образом, нами доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть выполняются условия (14), (15). Тогда существуют решения $u_j(x,t)$ задачи (9), (7), (8) и решение $u_j^{\varepsilon,\tau}(x,t)$ задачи (10)-(13), удовлетворяющие соотношениям (23), (24), причем при $\tau \to 0$

$$D_x^\beta u_j^{\varepsilon,\tau} \to D_x^\beta u_j \qquad (25)$$

равномерно для любого β.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 имеет место оценка:

$$\sup_{Q_T} \left| u_j^{\varepsilon,\tau}(x,t) - u_j^{\varepsilon}(x,t) \right| \le C \cdot \tau\,, \qquad (26)$$

где постоянная С не зависит от τ.

Замечание 2. Вместо расщепления (10)-(13) можно взять другие расщепления исходной задачи.

Замечание 3. При $j = 3$ имеет место аналогичные рассуждения. С помощью обратного преобразования полученные утверждения легко переносятся на функции $\tilde{E}_j$, $j = 1,2,3$.

Следствие 1. Справедлива оценка

$$\left[\left\| u - u^\varepsilon \right\|_{2,Q_N}^{(2,1)} \right]^2 + \left\| u - u^\varepsilon \right\|_{2,Q_T}^2 \le C \cdot \varepsilon^{1/2},$$

где u - решение исходной задачи, u^ε - решение ε - регуляризованной задачи.

Изучены модельные стационарные задачи электродинамики в областях с негладкими границами. Получены оценки их решений в весовых соболевских пространствах. Показано, что обобщенные решения задач типа Дирихле для стационарной и нестационарной систем уравнений Максвелла в областях с негладкими границами (угол на плоскости и двухгранник – в трёхмерном пространстве) принадлежат некоторым весовым пространствам H_{μ}^{k} и $W_{2,\mu}^{k}$.

Список литературы

1 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.

2 Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. – Красноярск: Красноярский госуниверситет, 1999. – 236 с.

3 Кучер Н.А. Об обосновании схем расщепления, используемых в методе крупных частиц // В сб.: Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1988. -Вып. 85. – С. 1-36.

4 Сахаев Ш.С. Краевые задачи для систем уравнений электродинамики и магнитной гидродинамики. -Алматы: Казак университеті, 2000. – 128 с.

5 Серегин Г.А. О локальной регулярности подходящих слабых решений уравнений Навье-Стокса. УМН, 2007, 62:3(375) с.149-168

6 Bektemesov M.A., Mukhametzhanov S.T. Inverse Problems of the a filtration. ABSTRACTS of the International Sympo-sium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 2003: 18–21 February 2003, Nagano City, JAPAN. Nagano City, 2003. PP. 151–152.5.

7 Abylkairov U.U., Mukhametzhanov S.T. and Khompysh Kh.. On the $\varepsilon-$approximation for the Modified eguations of the heat convection Universal Jornal of Mathematics and Mathematical Sciences Pushpa Publishing Allahabad, India. Volume 5, Number 1, 2014, Pages 37-51.

8 A. Meirmanov, N. Erygina, S. Mukhametzhanov.Mathematical model of a liquid filtration from reservoirs-Electronic Journal of Dierential Equations, Vol. 2014 (2014), No. 49, pp. 1-13.

Түйін

Бұл жұмыс электродинамиканың бір есебін зерттеуге арналған. Қарастырылып отырған жұмыс екіжақты облыста зерттелген. Ізделінді функцияға сәйкес тегіс кеңістік анықталған. Үшбұрыш ережесі мен ақырлы өсімшелер туралы Лагранж формуласын пайдалану арқылы туындылар жиынтығының тең дәрежелі үзіліссіздігі көрсетілген. Электродинамика есептері тегіс емес шекаралы облыста жай жуықтау әдісімен шешілген. Олардың шешімдері салмақтық Соболев кеңістігінде бағаланған. Максвелдің стационар және стационар емес теңдеулер жүйесі үшін тегіс емес шекаралы облыста Дирихле есебі түріндегі есептердің жалпыланған шешімі (жазықтықта

бұрыш, ал үш өлшемді кеңістікте –екі жақты бұрыш) салмақтық H_{μ}^{k} және $W_{2,\mu}^{k}$ кеңістігінде жататындығы көрсетілген.

Summary

In article the stationary problem of electrodynamics is considered. This problem is studied in dihedral region. There is the corresponding space of smoothness relatively unknown function. Application of the triangle inequality and Lagrange's formula of finite increments shows that family derivatives is equicontinuity. Electromagnetic problems in regions with nonsmooth boundaries are decided by the weak approximation. Estimations of their solutions in weight Sobolev spaces are obtained. It is shown that generalized solutions of Dirichlet problems for stationary and non-stationary system of Maxwell's equations in regions with nonsmooth boundaries (the angle of the plane and dihedral angle - in three-dimensional space) belong to certain weight spaces H_{μ}^{k} and $W_{2,\mu}^{k}$.

Keywords: electrodynamics, weak approximation method, the approximate solution.