С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым жаршысы**(пәнаралық) **= Вестник науки** Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина (междисциплинарный). – 2015. - №1 (84). – С.178-186

МЕТОД СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Тилепиев М.Ш.,
Уразмагамбетова Э.У.,
Грипп Е.А.

Аннотация

В этой работе исследовано применение метода слабой аппроксимации для решения диффузионной модели неоднородной жидкости с учетом магнитного поля. Исследуемая математическая модель представляет неэволюционную систему уравнений Навье - Стокса, то наряду с вопросом о разрешимости встает вопрос о ее $\varepsilon-$ аппроксимации. Применение такого метода направлено для того, чтобы получить из исходной системы уравнений систему типа Коши – Ковалевской. Данная задача аппроксимируется задачей для эволюционной системы уравнений с малым параметром ε по методу Ш.С. Смагулова и затем рассматривается расщепление полученной задачи методом слабой аппроксимации. Получена оценка скорости сходимости решений данной задачи к решению исходной задачи при стремлении к нулю параметра расщепления.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, диффузионная модель, метод слабой аппроксимации, приближенное решение.

В настоящей работе рассматривается задача, описывающая течение вязкой несжимаемой неоднородной жидкости в магнитном поле. Разрешимость нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости в классе векторов $W_2^{2,1}(Q_T)$ изучена О.А. Ладыженской и В.А. Солонниковым в работе [1].

Постановка задачи: Требуется найти векторы функций $\upsilon(x,t), H(x,t)$ и $\rho(x,t)$ в области $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset R^2$ ограниченная область с гладкой границей S и удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\rho(\upsilon_t + (\upsilon\nabla)\upsilon) - \mu(H\nabla)H = \nu\Delta\upsilon - \nabla\left(p + \mu\frac{|H|^2}{2}\right) + \rho f, \tag{1}$$

$$\rho_t + (\upsilon\nabla)\rho = 0, \tag{2}$$

$$div\upsilon = 0, \tag{3}$$

$$-\mu H_t - \frac{1}{\sigma} rot\ rot\ H + \mu rot[\upsilon, H] + \frac{1}{\sigma} rot\ j = 0 \ , \qquad (4)$$

$$divH = 0. \qquad (5)$$

Здесь и ниже $\upsilon(x,t)$ - вектор скорости течения жидкости с компонентами $\upsilon_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1,2$, $H(x,t)$ - вектор магнитной напряженности с компонентами $H_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1,2$, $p(x,t)$ - давление, $f(x,t)$ - заданные внешние гидродинамические силы, $j(x,t)$ - заданные токи, μ - магнитная проницаемость, σ - проводимость, $\rho(x,t)$ - плотность жидкости, ν - вязкость жидкости. В дальнейшем для однозначной разрешимости предполагается, что

$$j_\tau\big|_S = 0. \qquad (6)$$

На границе выполняется условие прилипания

$$\upsilon\big|_S = 0. \qquad (7)$$

Нормальная компонента вектора H равна нулю на границе S :

$$Hn \equiv H_n = 0 \ . \qquad (8)$$

Отсюда $(rot\ H)_\tau\big|_S = 0$ при $j_\tau\big|_S = 0.$

Для замыкания модели задаются начальные условия:

$$\upsilon\big|_{t=0} = \upsilon_0(x), \quad H\big|_{t=0} = H_0(x), \quad \rho\big|_{t=0} = \rho_0(x). \qquad (9)$$

Разрешимость сформулированной задачи установлена в работе [2]. Рассматриваемая математическая модель представляет неэволюционную систему уравнений Навье - Стокса, то наряду с вопросом о разрешимости встает вопрос о ее $\varepsilon -$ аппроксимации. Применение такого метода направлено для того, чтобы получить из исходной системы уравнений систему типа Коши – Ковалевской. С другой стороны при применении конечных разностных методов авторами установлены, что наилучшие оценки и скорости сходимости могут быть получены при аппроксимации условии несжимаемости в задаче (3) вида:

$$div\ \bar{u}^\varepsilon = \varepsilon\left(\Delta p^\varepsilon - p_t^\varepsilon\right), \quad \varepsilon > 0,$$

которая приводит исходную систему к параболической системе уравнений. Такая замена условия несжимаемости впервые рассматривалась для однородной жидкости в работе [3], где были доказаны теоремы существования различных решений и то, что при $\varepsilon \to 0$ они стремятся к решениям исходных задач. Наилучшие оценки сходимости установлены Ш. Смагуловым [4].

Дадим необходимые определения метода слабой аппроксимации для решения общих краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных эволюционного типа **[**5]**.**

В банаховом пространстве в рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L\,u = f(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = u_0, \tag{10}$$

где L - вообще говоря, нелинейный, неограниченный оператор с переменной областью определения $D(L)$, причем при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ оператор L отображает $D(L)$ в В банахово пространство.

Пусть $L = \sum_{i=1}^{m} L_i$, $f = \sum_{i=1}^{m} f_i$ и $D(L) \supseteq \bigcap_{i=1}^{m} D(L_i)$. Мы считаем, что операторы L_i отображают $D(L_i)$ в В и функции $f_i(t) \in B, \ i = 1,\ldots,m.$

Наряду с задачей (10) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ:

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + L_\tau\, u_\tau = f_\tau(t), \quad t \in [0,T], \quad u_\tau(0) = u_0. \tag{11}$$

Здесь $L_\tau = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\tau,t) L_i$, $f_\tau(t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(\tau,t)\ f_i(t)$, а функции $\alpha_i(\tau,t),\ \beta_i(\tau,t)$ слабо аппроксимируют единицу, то есть для любых $t_1,\ \mathrm{t}_2 \in [0,\mathrm{T}]$ при $\tau \to 0$ $\int_{t_1}^{t_2} (\alpha_i(\tau,t) - 1)dt \to 0,$ $\int_{t_1}^{t_2} (\beta_i(\tau,t) - 1)dt \to 0$.

В дальнейшем вместо “семейства задач (10) ”будем говорить о “задаче (11)”.

Метод решения задачи (10), при котором в качестве приближённых решений $u^\tau, \tau > 0$ берутся решения задачи (11) и решение u задачи (10) находится как предел при $\tau \to 0$ решений $u^\tau (u = \lim_{\tau\to 0} u^\tau)$, принято называть *методом слабой аппроксимации.* Обобщения и более подробные описания метода приведены в работе [8] и цитируемые библиографии в ней.

Часто коэффициенты $\alpha_i(\tau,t)$, $\beta_i(\tau,t)$ выбирают в виде

$$\alpha_i(\tau,t) = \beta_i(\tau,t) = \begin{cases} m, & \left(\mathrm{n} + \frac{i-1}{\mathrm{m}}\right)\cdot\tau < t \le \left(n + \frac{i}{m}\right)\cdot\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$n = 0,1,\ldots, N-1, \quad i = 1,\ldots,m.$$

В этом случае нахождение решения u_x задачи (11) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + mL_1 u_\tau = mf_1(t), \quad t \in (0, \frac{\tau}{m}], \quad u_\tau(0) = u_0 -$$ первый дробный шаг,

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + mL_2 u_\tau = mf_2(t), \quad \mathrm{t} \in (\frac{\tau}{\mathrm{m}}, \frac{2\tau}{m}],$$ - второй дробный шаг.

В качестве начальных данных на этом шаге берётся значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t=\frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $\left[\frac{2\tau}{m};\frac{3\tau}{m}\right),\ldots,\left[\frac{(m-1)\tau}{m};\tau\right)$. Тем самым находят решение на полуинтервале $(0,\tau]$ – нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на множестве $(\tau,2\tau]$ - первом целом шаге, затем – на множестве $(2\tau,3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов (число это равно N) решение u_τ находят на отрезке $[0,T]$. Задачу (11) называют расщеплением задачи (10).

Сформулируем теорему из [5], которой будем пользоваться в дальнейшем:

Теорема 1. Пусть функции $|f_n(t)|\le \mathrm{F}(t),\ n=1,2,\ldots,$ и $f_n(t),\ f(t),\ \mathrm{F}(t)\in \mathrm{L}_q(0,T),\ 1<q\le\infty.$ Для того, чтобы последовательность $f_n(t)$ слабо аппроксимировало $f(t)$ на отрезке $[0,T]$, необходимо и достаточно, чтобы $f_n(t)$ слабо сходилась к функции $f(t)$.

$$\Re\frac{\partial u}{\partial t}=Lu,\qquad u(t_0)=u_0(x). \tag{12}$$

Здесь $\Re=\Re_1+\Re_2$, $\mathrm{L}=\mathrm{L}_1+L_2$, и $\Re_i, L_i$ – некоторые операторы. Возникает вопрос, возможно ли по аналогии с рассмотренными в предыдущих параграфах расщеплениями осуществить расщепление следующего типа:

на первом дробном шаге

$$\Re_1\frac{\partial u_\tau}{\partial t}=L_1\,u_\tau, \tag{13}$$

на втором дробном шаге

$$\Re_2\frac{\partial u_\tau}{\partial t}=L_2\,u_\tau, \tag{14}$$

и при этом чтобы $\lim\limits_{\tau\to 0}u_\tau(t)=u(t)$.

Для того чтобы ответить на вопрос, предполагая существование обратных операторов $\Re_1^{-1}$, $\Re_2^{-1}$, преобразуем уравнения (13), (14) к виду

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t}=\Re_1^{-1}L_1u_\tau,\qquad\qquad \frac{\partial u_\tau}{\partial t}=\Re_2^{-1}L_2u_\tau.$$

Вводя оператор $\Lambda_\tau = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(\tau,t) \cdot \Re_i^{-1} L_i$, перепишем расщепленную систему в виде $\dfrac{\partial u_\tau}{\partial t} = \Lambda_\tau u_\tau$.

Если $\lim_{\tau \to 0} u_\tau = u$, то семейство операторов Λ_τ должно слабо аппроксимировать оператор $(\Re_1 + \Re_2)^{-1}(L_1 + L_2)$ на решении искомой задачи. Семейство операторов Λ_τ в то же время слабо аппроксимирует оператор $\Re_1^{-1} L_1 + \Re_2^{-1} L_2$, который, вообще говоря, не совпадает с оператором $(\Re_1 + \Re_2)^{-1}(L_1 + L_2)$. Следовательно, расщепление (13), (14) в общем случае не позволяет получить приближенное решение.

Исходная задача (1) - (9) аппроксимируется следующей задачей для эволюционной системы уравнений с малым параметром ε по методу Ш.С. Смагулова и затем будет рассматриваться расщепление полученной задачи методом слабой аппроксимации.

Итак, произведем ε-аппроксимацию задачи:

$$\rho^\varepsilon\left(\upsilon_t^\varepsilon + (\upsilon^\varepsilon \nabla)\upsilon^\varepsilon\right) - \mu(H^\varepsilon \nabla)H^\varepsilon = \nu\Delta\upsilon^\varepsilon - \nabla\left(p^\varepsilon + \mu\frac{|H^\varepsilon|^2}{2}\right) + \rho^\varepsilon f^\varepsilon, \tag{15}$$

$$\rho_t^\varepsilon + (\upsilon^\varepsilon \nabla)\rho^\varepsilon = 0, \quad div\,\upsilon^\varepsilon = \varepsilon(\Delta p^\varepsilon - p_t^\varepsilon), \tag{16}$$

$$-\mu H_t^\varepsilon - \frac{1}{\sigma} rot\ rot\ H^\varepsilon + \mu rot[\upsilon^\varepsilon, H^\varepsilon] + \frac{1}{\sigma} rot\ j_0 = 0. \tag{17}$$

Наряду с условиями (8) - (10) добавляются следующие условия:

$$p^\varepsilon\big|_{t=0} = p_0(x), \quad \left.\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial n}\right|_{S_T} = 0. \tag{18}$$

Разрешимость полученной регуляризованной задачи доказывается методом Галеркина и при выполнении утверждении леммы о компактности возможны предельные переходы в соответствующих интегральных тождествах. Полученные предельные функции являются решением исходной задачи (1) – (9).

Систему уравнений (15) - (17) представим для удобства опуская индекс по "ε" в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi(t, x, u, div u, \Delta u), \tag{19}$$

и для нее рассмотрим задачу Коши в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x) / t_0 \le t \le t_1, x \in R^2\}$:

$$u\big|_{t=t_0} = \Psi. \tag{20}$$

Здесь $u = colon\ (\upsilon(t,x), \rho(t,x), p(t,x), H(t,x))$,

$$\Phi\left(t, x, divu, \Delta u\right) = colon\left(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\right),$$

$$\Phi(t,x,u,divu,\Delta u) = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{\rho}\cdot\Delta\upsilon \ + \frac{\mu}{\rho}(H\nabla)H - \frac{1}{\rho}\cdot\nabla(p + \frac{\mu}{2}\cdot\left|H\right|^2) + f - (\upsilon\cdot\nabla)\upsilon \\ -(\upsilon\nabla)\rho \\ \Delta p - \frac{1}{\varepsilon}\cdot div\upsilon \\ -\frac{1}{\mu\cdot\sigma}\cdot rotrotH + rot\left[\upsilon, H\right] + \frac{1}{\mu\cdot\sigma}rotj_0 \end{pmatrix},$$

$$\psi = colon\ (\upsilon_0(x), \rho_0(x), p_0(x), H_0(x)).$$

Наряду (19), (20) рассматривается следующая система

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{4}\alpha_{i,\tau}(t)\cdot\Phi_{i,\tau}(t,x,u^\tau,divu^\tau,\Delta u^\tau), \tag{21}$$

где функции $\alpha_{i,\tau}(t)$ определены на отрезке $\left[t_0, t_1\right]$ следующим образом:

$$\alpha_{i,\tau}(t) = \begin{cases} K, & t_0 + \left(n + \frac{i-1}{K}\right)\tau \le t \le t_0 + \left(n + \frac{i}{K}\right)\tau, \\ 0, & в\ противном\quad случае, \end{cases}$$

$n = 0,1,\ldots,N-1;\quad \tau N = t_1 - t_0,\quad N, K -$ натуральные числа,

$\Phi_\tau = colon\left(\Phi_{1,\tau}, \Phi_{2,\tau}, \Phi_{3,\tau}, \Phi_{4,\tau}\right)$ - компоненты расщепленного вектора Φ.

$$u^\tau\Big|_{t=t_0} = \Psi\ . \tag{22}$$

Далее нам понадобятся вспомогательные утверждения по методу слабой аппроксимации. Установим их для задачи (21),(22).

Лемма 1. Если вектор функции $u^\tau, \frac{\partial u^\tau}{\partial t}$ непрерывны и равномерно по τ ограничены в, т $\Pi_{[t_0,t_1]} = \left\{(t,x)/t_0 \le t \le t_1, x \in R^2\right\}$ тогда существует решение задачи (21)-(22) при любом $\tau > 0$ и имеет место неравенство:

$$\left\|u^\tau\right\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} + \left\|\frac{\partial u^\tau}{\partial t}\right\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} \le C, \tag{23}$$

где C не зависит от τ, а лишь линейным образом зависит от ε.

Лемма 2. При выполнении условии леммы 1 для функций u^τ, удовлетворяющих неравенству (23) в

$\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x)/t_0 \le t \le t_1, x \in R^2\}$ имеет место равномерно по τ неравенство:

$$\left|\Phi_i(t,x,u^\tau,divu^\tau,\Delta u^\tau) - \Phi_{i,\tau}(t,x,u^\tau,divu^\tau,\Delta u^\tau)\right| \le c\cdot\tau, \quad i=1,2,...,K, \tag{24}$$

где $\Phi_i, \Phi_{i,\tau}$ -компоненты векторов Φ, Φ_τ соответственно, c - положительная постоянная и линейным образом зависит от ε.

Установим оценку разности $u - u^\tau$. Для этого рассмотрим средние функции u^τ_{cp}:

$$u^\tau_{cp} = \frac{1}{\tau}\cdot\int_t^{t+\tau} u^\tau(\theta)d\theta. \tag{25}$$

Усредняя систему (21), получим:

$$\frac{\partial u^\tau_{cp}(t,x)}{\partial t} = \Phi_\tau(t,x,u^\tau_{cp},divu^\tau_{cp},\Delta u^\tau_{cp}) + F_\tau(t,x), \tag{26}$$

где $F_\tau(t,x) = \frac{1}{\tau}\cdot\int_t^{t+\tau}\left\{\sum_{i=1}^K \alpha_{i,\tau}(\theta)\cdot\Phi_{i,\tau}(\theta,x,u^\tau(\theta,x),divu^\tau(\theta,x),\Delta u^\tau(\theta,x)) - \right.$

$$\left. - \sum_{i=1}^K \alpha_{i,\tau}(\theta)\cdot\Phi_{i,\tau}(t,x,u^\tau{}_{cp}(t,x),divu^\tau{}_{cp}(t,x),\Delta u^\tau{}_{cp}(t,x))\right\}d\theta = \frac{K}{\tau}\cdot$$

$$\cdot\sum_{i=1}^K\int_{\sigma_i}\left\{\Phi_{i,\tau}(\theta,x,u^\tau(\theta,x),divu^\tau(\theta,x),\Delta u^\tau(\theta,x)) - \right. \tag{27}$$

$$\left. - \Phi_{i,\tau}(t,x,u^\tau{}_{cp}(t,x),divu^\tau{}_{cp}(t,x),\Delta u^\tau{}_{cp}(t,x))\right\}d\theta$$

Здесь $\sigma_i \subset [t,t+\tau]$ - множества, на которых функций $\alpha_{i,\tau}(t)$ не обращаются в нуль на отрезке $[t_0,t_1]$. Введем следующие функций $z = u^\tau_{cp} - u$, $P(t,x,z) = \Phi_\tau(t,x,u^\tau_{cp},divu^\tau_{cp},\Delta u^\tau_{cp}) - \Phi(t,x,u,divu,\Delta u)$. Тогда относительно построенных функций получим следующую задачу:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = P(t,x,z) + f(t,x), \qquad z\big|_{\tau=t_0} = \tilde{\psi}. \tag{28}$$

Решение задачи (28) существует в $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x)/t_0 \le t \le t_1, x \in R^2\}$ и для него имеет место оценка:

$$\|z\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} \le C\left\{\sup_\Omega|\tilde{\psi}| + \|f\|_{C(\Pi[t_0,t_1])}\right\}, \tag{29}$$

где постоянная C зависит от ε и $\|u^j\|_{C(\Pi[t_0,t_1])}$, $j=1,2$. Предположим, что выполняются условия лемм 1,2. Кроме того, имеем

$$\sup_{\Omega}\left|\Phi-\Phi_{\tau}\right| \le C\cdot\tau. \qquad (30)$$

Тогда, вычитая из (26) систему (19), получим, что функция $z = u_{cp}^{\tau} - u$ есть решение задачи (28) с $f = F_{\tau}, \tilde{\psi} = u_{cp}^{\tau}(0) - \Psi = 0.$ В силу соотношений (23), (27), (29), (30), получим, что $\|z\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} \le C\cdot\tau$, так как $z = u_{cp}^{\tau} - u$ в силу леммы 1 $\left\|u_{cp}^{\tau} - u^{\tau}\right\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} \le C\cdot\tau,$ и $\left\|u_{cp}^{\tau} - u\right\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} \le C\cdot\tau,$ то из неравенства треугольника получаем $\left\|u-u^{\tau}\right\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} \le \left\|u_{cp}^{\tau} - u^{\tau}\right\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} + \left\|u_{cp}^{\tau} - u\right\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} \le C\cdot\tau$, где согласно обозначениям $u = u^{\varepsilon}, u^{\tau} = u^{\varepsilon,\tau}$.

Таким образом, нами доказана теорема

Теорема2. Пусть выполняются условия лемм 1,2 и неравенство (30). Тогда имеет место оценка $\left\|u-u^{\tau}\right\|_{C(\Pi[t_0,t_1])} \le C\cdot\tau,$

где u - решение задачи (19), (20), а u^{τ} - приближенное решение задачи (21), (22).

Рассмотрим задачу (1)- (1) и произведем согласно методу слабой аппроксимации ее расщепление на четыре одномерные задачи переноса и диффузии:

$$\frac{\partial u^{\tau}}{\partial t} = 4\nu_1 \frac{\partial^2 u^{\tau}}{\partial x_1^2} + 4\cdot f_1, \qquad n\tau < t \le \left(n+\frac{1}{4}\right)\tau,$$

$$\frac{\partial u^{\tau}}{\partial t} + 4\nu_2 \cdot u\Big|_{t=(n+\frac{1}{4})\tau} \cdot \frac{\partial u^{\tau}}{\partial x_1} = 4\cdot f_2, \qquad \left(n+\frac{1}{4}\right)\tau < t \le \left(n+\frac{1}{2}\right)\tau,$$

$$\frac{\partial u^{\tau}}{\partial t} = 4\nu_3 \frac{\partial^2 u^{\tau}}{\partial x_2^2} + 4\cdot f_3, \qquad \left(n+\frac{1}{2}\right)\tau < t \le \left(n+\frac{3}{4}\right)\tau,$$

$$\frac{\partial u^{\tau}}{\partial t} + 4\nu_4 \cdot u\Big|_{t=(n+\frac{3}{4})\tau} \cdot \frac{\partial u^{\tau}}{\partial x_2} = 4\cdot f_4, \qquad \left(n+\frac{3}{4}\right)\tau < t \le (n+1)\tau,$$

$$u^{\tau}\Big|_{t=t_0} = \Psi.$$

Здесь через u_i^{τ} обозначены u в момент времени $t_n = n\tau, n = 0,1,2,..., N-1, N\tau = T$ и $u_i^{\tau} = colon\,(\upsilon_i^{\tau}, H_i^{\tau}, p^{\tau}, \rho^{\tau}), i = 1,2$, а функций f_j означают значения искомых функций из предыдущего слоя по времени, $\nu_j, j = 1,2,3,4$ определяются через коэффициенты системы уравнений (1)-(5).

При определенной гладкости данных в смысле выполнения интегральных тождеств, указанные в определении обобщенного решения задачи (1)-(5), (6)-(10) справедлива следующая

Лемма 3. Пусть $v_0(x), H_0(x), \rho_0(x), p_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^3(\Omega)$. Тогда имеют место оценки:

$$\left\| u^{\varepsilon,\tau} \right\|_{L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))} + \left\| u_t^{\varepsilon,\tau} \right\|_{L_2(\Omega_T)} \le C_1, \tag{31}$$

$$\left\| \Delta u^{\varepsilon,\tau} \right\|_{L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))} + \left\| u_{tx}^{\varepsilon,\tau} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega_T))} \le C_2, \tag{32}$$

где константы C_i, $i = 1,2$ не зависят от τ.

На основе теоремы 2 получаем скорость сходимости решения приближенной задачи к решению $\varepsilon-$регуляризованной задачи с учетом леммы о компактности приближений справедлива следующая

Теорема 3. Пусть выполнены условия лемм 1-3. Тогда имеет место оценка:

$$\left\| u^{\varepsilon,\tau} - u^{\varepsilon} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \left\| u^{\varepsilon,\tau} - u^{\varepsilon} \right\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \le C \cdot \tau,$$

где u^{ε} -решение задачи (19), (20), $u^{\varepsilon,\tau}$ -решение задачи (21), (22).

Следствие 1.2.1 Справедлива оценка

$$\left[\left\| u - u^{\varepsilon} \right\|_{2,Q_T}^{(2,1)} \right]^2 + \left\| u - u^{\varepsilon} \right\|_{2,Q_T}^2 \le C \cdot \varepsilon^{1/2},$$

где u - решение исходной задачи (1)-(7), u^{ε} - решение ε - регуляризованной задачи (19)-(20).

Замечание 1.3.1 Для решения задачи (1) – (9) применить непосредственно метод слабой аппроксимации (МСА) невозможно, т.к. система уравнений не является системой типа Коши – Ковалевской. Поэтому, исходя из результатов работы [3], сначала рассматривается ε - аппроксимация модели, затем осуществляется переход к применению метода слабой аппроксимации.

Список литературы

1 Ладыженская О.А., Солонников В.А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // В кн.: Краевые задачи математической физики и смешанные вопросы теории функций. - Л.: Наука, 1975. - С. 52-109.

2 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.

3 Смагулов Ш.С. Аппроксимация уравнений одной модели неоднородной жидкости // В кн.: Численные методы механики сплошной среды. –Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. - Т. 8, № 2. - С. 112-124.

4 Смагулов Ш.С. Об одном варианте аппроксимации уравнений Навье-Стокса // В кн.: Дифф. уравнения с частными производными. – Новосибирск: Наука, 1980. - С. 54-62.

5 Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. – Красноярск: Красноярский госуниверситет, 1999. – 236 с.

6 Серегин Г.А. О локальной регулярности подходящих слабых решений уравнений Навье-Стокса. УМН, 2007, 62:3(375) с.149-168

7 Bektemesov M.A., Mukhametzhanov S.T. Inverse Problems of the a filtration. ABSTRACTS of the International Sympo-sium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 2003: 18–21 February 2003, Nagano City, JAPAN. Nagano City, 2003. PP. 151–152.5.

8 Abylkairov U.U., Mukhametzhanov S.T. and Khompysh Kh.. On the $\varepsilon-$approximation for the Modified eguations of the heat convection Universal Jornal of Mathematics and Mathematical Sciences Pushpa Publishing Allahabad, India. Volume 5, Number 1, 2014, Pages 37-51.

9 A. Meirmanov, N. Erygina, S. Mukhametzhanov.Mathematical model of a liquid filtration from reservoirs-Electronic Journal of Dierential Equations, Vol. 2014 (2014), No. 49, pp. 1-13.

Түйін

Бұл жұмыста магниттік өрісті ескере отырып, бір текті емес сұйықтың диффузиялық моделін шешу үшін жай жуықтау әдісін қолдану зерттелген.

Зерттеліп отырған математикалық модель эволюциалық емес Навье - Стокс теңдеулер жүйесін береді, оны шешумен қатар $\varepsilon-$ жуықтау туралы мәселе туындайды. Мұндай әдісті қолдану алғашқы теңдеулер жүйесін Коши – Ковалевскийдің теңдеулер жүйесіне келтіруге бағытталған. Осы есеп Ш.С. Смағұловтың әдісі бойынша ε аз параметрлі эволюциялық теңдеулер жүйесіне арналған есебімен жуықталып, ары қарай алынған есептің жай жуықтау әдісі бойынша ыдырату қарастырылған.

Есептің шешімінің берілген есептің шешіміне ыдырату параметрі нөлге ұмтылған жағдайда жинақталу жылдамдығы алынған.

Summary

The application of the weak approximation method for the solution of the diffusion model of an inhomogeneous fluid given magnetic field in this paper is investigated.

The mathematical model is non-evolutionary Navier - Stokes equations, then, question of its $\varepsilon-$ approximation with the question of the solvability is considered. Application of this method enables to obtain from the original system of equations to system of type Cauchy - Kowalevski.

This problem can be approximated problem for evolution system of equations with a small parameter ε by Sh.S. Smagulov method and then discusses splitting of the problem is considered by method of weak approximation.

An estimate for the rate of convergence of the problem solutions to the solution of the original problem as splitting parameter tends to zero.