С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым жаршысы**(пәнаралық) **= Вестник науки** Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина (междисциплинарный). – 2015. - №1 (84). – Б. 142-147

ҮШІНШІ ДӘРЕЖЕЛІ НҰҚСАНДЫ ЭЛЛИПСТІК ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ

Ақжігітов Е.Ә., Ракишева З.А., Жароева А.Г.

Аннотация

Нұқсанды эллипстік теңдеулер заманауи механика мен теориялық физиканың негізгі теңдеулері болып табылады. Дифференциалдық теңдеулер үшін үш категорияға бөлінетін- шешімнің бар болуы, жалғыздығы және шешімнің сапалық сипаты сияқты сұрақтардың туындайтыны белгілі нәрсе.

Математикалық әдістерді күнделікті болып жатқан құбылыстардың сипаттамасын зерттеу үшін оның математикалық сүлбесінің адекватты екендігін көрсету үшін қолданылады. Сондықтан да сызықты және сызықты емес эллипстік теңдеулер үшінші категориялы сұрақтардың алатын орны өте маңызды. Мақалада локализация әдісі мен априорлық бағалау әдісін қолданып, кез-келген $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ үшін Дирихле есебінің жалғыз күшті шешімі алынды.

***Кілттік сөздер*:** оператор, сүлбе, үзіліссіздік, шекаралық шарттар, есеп, эллипстік теңдеу.

Мақалада $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 1\}$ тікбұрышында Дирихле есебін қарастырамыз:

$$(L+\lambda E)u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - B(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \lambda u = f(x,y); \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0; \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=2\pi}; \ (i = 0,1,2). \qquad (3)$$

Төмендегі нормаға сәйкес (3) шартты қанағаттандыратын $C^\infty(\overline{\Omega})$ функциялар ішкі кеңістігін толықтырудан шыққан кеңістікті $L_2^{(s)}(\Omega)$ - функциялар кеңістігі деп белгілейік:

$$\| u, L_2^{(s)}(\Omega) \|_0 = \left(\int_\Omega \left| B(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 + |u|^2 dxdy \right)^{1/2}. \qquad (4)$$

Әрі қарай (1) теңдеудің коэффициенттері мен $\rho(y) \geq 0$ салмақтық функциясына келесі шектеулер қоямыз:

а) $B(y), \rho(y) \in C[0,1]$;

б) $|B(y)|$, $\rho(y)\ge 0$ функциялары $[0,1]$ аралығында кемімейді,

және $-B(y)\ge 0$ немесе $-B(y)\le 0$;

в) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\rho(2y)}{\rho(y)}<\infty$, $\lim\limits_{y\to 0}\frac{B(2y)}{B(y)}<\infty$.

Теорема. а)-в) шарттары орындалсын. Сонда $\rho(y)D_x^{\alpha}(L+\lambda E)^{-1}$ операторы $L_2(\Omega)$ кеңістігінде шектеулі болады сонда тек сонда ғана, егерде $\underline{\lim}_{n\to\infty}\gamma_{|n|}>0$ болса, мұнда

$$\gamma_{|n|}=\frac{\theta_n^4}{(1+|n|)^{2\alpha}}\inf_{\theta_n\ge\xi\ge 1}\left(\frac{1+\theta_n^{-2}\left(|n|^3\left|B\left(\frac{\xi}{\theta_n}\right)\right|+1\right)}{\rho\left(\frac{\xi}{\theta_n}\right)}\right). \qquad (5)$$

($n=\pm 1,\pm 2,\dots$).

Мұнда $\theta_n\ge 1$ мына шартты қанағаттандыратын кез-келген сан

$$C\le\theta_n^{-2}\left(|n|^3\left|B\left(\frac{1}{\theta_n}\right)\right|+1\right)\le C_0 . \qquad (6)$$

Теореманы дәлелдеу үшін қосымша бағалауларды пайдаланайық.

$$(l_n+\lambda E)z=-z''(y)+iB(y)n^3z(y)+\lambda z(y)=f_n(y)\,; \qquad (7)$$

$$z(0)=z(1)=0\,. \qquad (8)$$

(8) шекаралық шартты қанағаттандыратын (7) теңдеуді қарастырамыз

Мына шаманы енгізейік

$$\mu_{|n|}=\inf_{\substack{z\in C^2(0,1)\\ z(0)=z(1)=0}}\frac{\int_0^1|(l_n+\lambda E)z|^2dy}{\int_0^1\left|(1+|n|)^{\alpha}\rho(y)z\right|^2dy}=\inf_{\substack{z\in C^2(0,1)\\ z(0)=z(1)=0}}\frac{\|(l_n+\lambda E)z\|_0^2}{\left\|(1+|n|)^{\alpha}\rho(y)z\right\|_0^2}. \qquad (9)$$

Лемма. (7) теңдеудің коэффициенттері а)-в) шартын қанағаттандырсын. Сонда мына теңсіздік орындалады

$$C^{-1}\gamma_{|n|}\le\mu_{|n|}\le C\gamma_{|n|}\;,\;(n=0,\pm 1,\pm 2,\dots). \qquad (10)$$

Мұнда $\gamma_{|n|}$ шамасы (5) теңдікпен анықталады.

Дәлелдеуі. $y=\frac{x}{\theta_n}$ алмастыруын жасаймыз. Осы алмастырудан кейін (9) мына түрге ие болады:

$$\mu_{|n|}=\frac{\theta_n^2}{(1+n)^{2\alpha}}\inf_{\substack{z\in C^2[0,1]\\ z(0)=z(1)=0}}\frac{\int_0^{\theta_n}\left|-z''+\psi_n(x)z\right|^2dx}{\int_0^{\theta_n}\left|\overline{\rho}(x)z\right|^2dx}\ , \qquad (11)$$

мұнда

$$\overline{\rho}(x)=\rho\left(\frac{x}{\theta_n}\right),\quad \psi_n(x)=\theta_n^{-2}\left(in^3B\left(\frac{x}{\theta_n}\right)+1\right). \qquad (12)$$

Енді $\int_0^{\theta_n}\left|-z''+\psi_n(x)z\right|^2dx$ төменгі жағынан бағалаймыз. Ол үшін, квадраттық форманы құрып және а) - в) шарттарын пайдаланып, мына теңсіздіктерді аламыз:

$$\left\|-z''+\psi_n(x)z\right\|_0\geq C_0\|z\|_0\ ; \qquad (13)$$

$$\left\|-z''+\psi_n(x)z\right\|_0\geq C\|z'\|_0\ . \qquad (14)$$

Мына шарттарды қанағаттандыратын $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ екі функцияны қарастырайық:

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2\equiv 1;$$

$$\sup_x\sum_{i=1}^2\left(\left|\varphi''_i\right|+\left|\varphi'_i\right|+\left|\varphi_i\right|\right)\leq C\ ;$$

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}1, x\in\left[\frac{3}{2}k-\frac{1}{4},\frac{3}{2}k+\frac{1}{4}\right]\\ 0, x\in\left[\frac{3}{2}k+\frac{1}{2},\frac{3}{2}k+1\right],\quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).\end{cases}$$

Егер $z\in C^2[0,\theta_n]$ және $z(0)=z(\theta_n)=0$ болса, онда (13) және (14) пайдаланып, мына теңсіздікті аламыз:

$$\left\|-(z\varphi_i)''+\psi_n(x)z\varphi_i\right\|_0=\left\|-z''\varphi_i-2z'\varphi'_i-z\varphi''_i+\psi_n(x)z\varphi_i\right\|_0=$$

$$=\left\|\varphi_i\left(-z''+\psi_n(x)z\right)-2z'\varphi'_i-z\varphi''_i\right\|_0\leq\left\|\varphi_i\left(-z''+\psi_n(x)z\right)\right\|_0+$$

$$+\left\|2z'\varphi'_i-z\varphi''_i\right\|_0\leq\left\|\varphi_i\left(-z''+\psi_n(x)z\right)\right\|_0+\left\|-2z'\varphi'_i\right\|_0+$$

$$+\left\|-z'\varphi''_i\right\|_0\leq C_0\left\|-z''+\psi_n(x)z\right\|_0,\quad (i=1,2).$$

Бұл теңсіздіктерді (11) ге қоямыз:

$$\mu_{|n|}=\frac{\theta_n^4}{(1+|n|)^{2\alpha}}\inf_{\substack{z\in C^2[0,\theta_n]\\ z(0)=z(\theta_n)=0}}\frac{\int_0^{\theta_n}\left|-z''+\psi_n(x)z\right|^2dx}{\int_0^{\theta_n}\left|\overline{\rho}(x)z\right|^2dx}\geq$$

$$\geq \frac{\theta_n^4}{C(1+|n|)} \inf_{\substack{z\in C^2[0,\theta_n] \\ z(0)=z(\theta_n)=0}} \frac{\sum_{i=1}^{2}\int_0^{\theta_n}\left|-(z\varphi_i)''+\psi_n(x)z\varphi_i\right|^2 dx}{\sum_{i=1}^{2}\int_0^{\theta_n}\left|\overline{\rho}(x)z\varphi_i\right|^2 dx} =$$

$$= \frac{\theta_n^4}{C(1+|n|)^{2\alpha}} \inf_{\substack{z\in C^2[0,\theta_n] \\ z(0)=z(\theta_n)=0}} \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{N_{k_i}}\int_{\Delta^-_{k_i}}^{\Delta^+_{k_i}}\left|-(z\varphi_i)''+\psi_n(x)z\varphi_i\right|^2 dx}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{N_{k_i}}\int_{\Delta^-_{k_i}}^{\Delta^+_{k_i}}\left|\overline{\rho}(x)z\varphi_i\right|^2 dx}. \qquad (15)$$

$\Delta=(\Delta^-,\Delta^+)\subset(0,\theta_n)$ және $\Delta^+-\Delta^-\leq 1$ болсын, мұнда Δ^- және Δ^+ белгілеулері Δ интервалының сәйкес оң және сол жақ шеттері. а) - в) шарттарын пайдаланып, $z\in C^2(\overline{\Delta})$ функциясы үшін мынаны аламыз:

$$\int_{\Delta^-}^{\Delta^+}\left|-z''+\psi_n(x)z\right|^2 dx \geq C\left(1+\tilde{\psi}_n(\Delta^-)\right)\int_{\Delta^-}^{\Delta^+}|z|^2 dx, \qquad (16)$$

мұнда $\tilde{\psi}_n(x)=\operatorname{Re}\psi_n(x)+\left|\operatorname{Im}\psi_n(x)\right|$.

(15) теңсіздік және төмендегі белгілі теңсіздіктен:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}\geq \inf_{i=\overline{1,n}}\frac{a_i}{b_i}, \quad a_i\geq 0, \quad b_i\geq 0.$$

мына теңсіздікті аламыз:

$$\mu_{|n|}\geq \frac{\theta_n^4}{C(1+|n|)^{2\alpha}} \inf_{\substack{\Delta\subset C^2[0,\theta_n] \\ \Delta^+-\Delta^-\leq 1}} \inf_{\substack{z\in C^2[0,\theta_n] \\ z(\Delta^-)=z(\Delta^+)=0}} \frac{\int_{\Delta^-}^{\Delta^+}\left|-z''+\psi_n(x)z\right|^2 dx}{\int_{\Delta^-}^{\Delta^+}\left|\overline{\rho}(x)z\right|^2 dx},$$

бұдан , (16) ға сәйкес

$$\mu_{|n|}\geq \frac{\theta_n^4}{C(1+|n|)^{2\alpha}} \inf_{\substack{\Delta\subset C^2[0,\theta_n] \\ \Delta^+-\Delta^-\leq 1}} \frac{\left(1+\tilde{\psi}_n(\Delta^-)\right)^2}{\overline{\rho}^2(\Delta^+)}.$$

а) - в) шарттарын және (6) теңсіздікті ескере отырып, $\mu_{|n|}$ саны үшін келесі төменгі жағынан бағалауды табамыз:

$$\mu_{|n|}\geq C^{-1}\frac{\theta_n^4}{(1+|n|)^{2\alpha}} \inf_{\theta_n\geq\xi\geq 1}\frac{\left(1+\tilde{\psi}_n(\xi)\right)^2}{\overline{\rho}^2(\xi)},$$

$\mu_{|n|}$ үшін жоғарғы жағынан бағалау мына түрде болады:

$$\mu_{|n|}\geq C\frac{\theta_n^4}{(1+|n|)^{2\alpha}} \inf_{\theta_n\geq\xi\geq 1}\frac{\left(1+\tilde{\psi}_n(\xi)\right)^2}{\overline{\rho}^2(\xi)}. \qquad (17)$$

Бұл теңсіздік және (17) лемманы дәлелдейді.

Теореманың дәлелдеуі.

Егер $f(x,y)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(1+\lambda E)^{-1} f_n(y)e^{inx}$ болса, онда

$$u\ (x,y)=(L+\lambda E)^{-1} f\ =\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(l_n+\lambda E)^{-1} f_n(y)\right]e^{inx}, \qquad (18)$$

$[0,2\pi]$ аралығында $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ жүйесі ортонормаланған жүйе және (18) ден мынаны аламыз:

$$\left\|\rho(y)D_x^{\alpha}(L+\lambda E)^{-1}\right\|_{L_2(\Omega)}=\sup_{\{n\}}\left\|n^{\alpha}\rho(y)(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{L_2[0,1]}. \qquad (19)$$

Бұдан

$$\left\|\rho(y)D_x^{\alpha}(L+\lambda E)^{-1} f\right\|_0^2 = \sum_{n=-N}^{N}\left\||n|^{\alpha}\rho(y)(l_n+\lambda E)^{-1} f_n\right\|_0^2 +$$

$$+\sum_{n<-N}^{n>N}\left\||n|^{\alpha}\rho(y)(l_n+\lambda E)^{-1} f_n\right\|_0^2 . \qquad (20)$$

Әрбір n үшін $(l_n+\lambda\ E)^{-1}$ операторы әбден үзіліссіз болуына байланысты және (20) дан мынандай қорытындыға келеміз $\rho(y)D_x^{\alpha}(L+\lambda E)^{-1}$ операторы әбден үзіліссіз болады сонда тек сонда ғана, егер де:

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}\left\|\rho(y)|n|^{\alpha}(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_0 = 0,$$

болса, және ол мынаған теңдес:

$$\underline{\lim}_{|n|\to\infty}\left(\left\|\rho(y)|n|^{\alpha}(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_0\right)^{-1}=\infty .$$

Бірақ мына шама

$$\mu_{|n|}=\left(\left\|\rho(y)|n|^{\alpha}(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_0^{-1}\right)^{-1},$$

лемма бойынша былай бағаланады:

$$C^{-1}\gamma_n\le\mu_{|n|}\le C\gamma_n . \qquad (21)$$

Ендеше, теореманың $\rho(y)D_x^{\alpha}(L+\lambda E)^{-1}$ операторы әбден үзіліссіз болады деген тұжырымдамасы дәлелденді. Ал оператордың шектеулі екендігі туралы тұжырым (19) және (21) формулалардан шығады. Сонымен теорема толығымен дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі

1. Акжигитов Е.А., Муратбеков М.Б. Задача Дирихле для одного класса вырождающихся уравнений нечетного порядка // Известия МН-АН РК. Сер. физ.-мат.- 1997.- № 3.- С.3-11.
2. Муратбеков М.Б. О гладкости решений одного класса неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка //

Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики
-Новосибирск. 1981.- С. 144-146.
3. Акжигитов Е.А. Теорема о гладкости решений краевой задачи для вырождающихся эллиптических уравнений // Вестник науки КазАТУ им. С. Сейфуллина. -2013. -№1(76). -С.102-109.
4. Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. Estimates of spectrum for a class of mixed type operators// Differensial equations -2012.-Vol. 43 -pp.143-146.

Резюме

Вырождающиеся эллиптические уравнения являются одним из основных уравнений современной механики и теоретической физики. Известно, что для дифференциальных уравнений существуют вопросы, которые можно отнести к одной из трех категорий: существование, единственность и качественное поведение решений.

В приложениях математические методы применяются как для обоснования адекватности математической модели, так и для изучения характера протекания реального процесса. Поэтому важное место в теории линейных и нелинейных эллиптических уравнений занимает и третья категория вопросов. В статье использованы метод локализации и метод априорных оценок и получено единственное сильное решение задачи Дирихле при любом $f(x,y) \in L_2(\Omega)$.

Summary

The degenerating elliptic equations are one of the main equations of modern mechanics and theoretical physics. It is known that for the differential equations there are questions which can be carried to one of three categories: existence, uniqueness and qualitative behavior of decisions. In appendices mathematical methods are applied both to substantiation of adequacy of mathematical model, and to studying of character of course of real process. Therefore the important place in the theory of the linear and nonlinear elliptic equations is taken up also by the third category of questions. In article the method of localization and a method of aprioristic estimates are used and the only strong solution of a task of Dirikhle is received at any $f(x,y) \in L_2(\Omega)$.