

ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ЦЕНТРЛІК КҮШ ӨРІСІНДЕГІ ДЕНЕ ҚОЗҒАЛЫСЫН САНДЫҚ ӘДІСТЕРМЕН ЗЕРТТЕУ

Мукушев Б.А. п.ғ.д., профессор

С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, 010011,

Нұр-Сұлтан қаласы, Жеңіс даңғылы, 62.

mba-55@mail.ru

Түйін

Ғарыш денелерінің гравитациялық өрісін зерттеу аспан механикасы ғылымының негізгі міндеттерінің біріне жатады. Мақалада табиғаты гравитациялық болатын центрлік күш өрісінде қозғалатын аспан денелерінің қозғалыстары қарастырылады. Өзара тартылыстағы екі дененің қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер қарастырылған. Осы теңдеулерге өлшемсіздендіру амалы қолданылған. MathCAD қолданбалы программалар пакеті көмегімен дифференциалдық теңдеулер сандық әдістер арқылы графикалық түрде шешілген. Кеплердің бірінші және екінші заңдарына қатысты сандық мәліметтер қолданбалы программа көмегімен алынған. Өзара гравитациялық тартылыстағы екі дененің бірінің массасы екіншісінен өте үлкен болған жағдайдағы екінші дененің эллипс түріндегі орбитасының эксцентриситеті есептелді және осы орбитаның жарты осьтерінің ұзындығы табылды. Табиғаты гравитациялық центрлік күш өрісінде қозғалған дененің траекториясы сол дененің радиус-векторы сызған ауданмен берілді.

Кілт сөздер: екі дене туралы есеп, гравитациялық өріс, центрлік симметриялық күш, дифференциалдық теңдеулер, сандық әдістер, Mathcad пакеті, Кеплер заңдары.

Кіріспе

Аспан денелерінің табиғаты гравитациялық болатын центрлік күш өрісіндегі қозғалысы, немесе табиғи серіктердің планетаның айналасындағы қозғалысы центрлік симметриялық тартылыс өрісіндегі дене қозғалысының дербес жағдайлары болып табылады. Планеталардың, табиғи серіктердің, Жердің жасанды серіктерінің, кометалардың қозғалысы жалпы

алғанда өзара гравитациялық әсердегі n дене туралы есепке жатады. Дегенмен n дене туралы есепті жуықтай отырып екі дене туралы есепке келтіруге болады. Мысалы, теориялық тұрғыдан алғанда Жерді айнала қозғалып жүрген оның табиғи серігі Айға Күн және басқа планеталар ықпал етеді. Бірақ бұл ықпалдар Жердің гравитациялық ықпалынан мыңдаған

есе аз екенін ескере отырып, Жер және Айдың өзара гравитациялық әсерін ғана қарастырамыз.

Аспан денелерінің қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді шешуде электрондық есептеу машиналарына негізделген сандық әдістер қолданылады. Сандық әдісті қолданбас бұрын физикалық құбылысты сипаттайтын

шамаларды өлшемсіздендірудің қажеттілігі туады. Өлшемсіздендіру амалынан өткен дифференциалдық теңдеулерді кез-келген программалау тілін қолдана отырып, ықшамды түрде шешуге болады. Біз дифференциалдық теңдеулерді MathCAD қолданбалы программалар пакеті көмегімен шешу жолдарын көрсетеміз.

Зерттеу материалдары және әдістемесі

Табиғаты гравитациялық центрлік күштің өрісіндегі дене қозғалысын сипаттайтын параметрлер және олардың арасындағы тәуелділіктер сандық әдістер көмегімен зерттелді. Сандық әдістерді қолдану MathCAD қолданбалы программалар пакеті көмегімен жасалады. MathCad – инженерлік және ғылыми есептеулерді жүргізуге арналған математикалық пакет. MathCAD қолданбалы программалар пакеті сандық әдістер көмегімен әр түрлі физикалық құбылыстарды зерттей алады. Пакеттің ең негізгі ерекшелігі тілінің табиғи тілге ұқсас жатқандығында. Текстік редактордың математикалық мүмкіндіктерін біріктірген бұл пакет

физикалық модельдеу үшін көп мүмкіндік береді. MathCad класының жүйесінің физикалық зерттеулерді жүргізудегі рөлі ерекше. Күрделі есептеулерді шешуді жеңілдете отырып, ол зерттеу кезіндегі қиындықты біршама жеңілдетеді.

MathCad қолданбалы программалар пакетінің графикалық мүмкіндіктері ғылыми есептеулерді мәтінмен қатар графиктік кескіндермен, суреттермен, кестелермен безендіруге мүмкіндік береді. Оның практикалық қолданысы интеллектуалды жұмыстардың тиімділігін арттырады. Қолданушы өзінің ғылыми еңбегіне өзгерістер енгізе отырып оның нәтижесін сол бетте бірден бақылай алады.[1-2].

Ғылыми-зерттеу жұмысының нәтижелері

1. *Центрлік симметриялық тартылыс өрісіндегі дененің қозғалыс теңдеуі.* Өзара тартылыс күші арқылы әсерлесетін екі дененің біреуінің массасы екіншісінен өте үлкен болса ($M \gg m$), онда Декарт координата жүйесі үшін *тдененің қозғалыс теңдеуі мынандай түрде болады [3-5]:*

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{\gamma m M}{|\vec{r}|^2} \vec{r} \quad (1)$$

$\frac{\gamma m M}{|\vec{r}|^2} \vec{r}$ - Ньютонның бүкіл әлемдік тартылыс заңы. Мұндағы M центрлік симметриялық гравитациялық күш өрісін жасайтын дене.

Импульс моментінің сақталу заңынан центрлік күш өрісіндегі қозғалған дененің траектория жазықтығына \vec{L} вектор перпендикуляр болатынын білеміз.

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

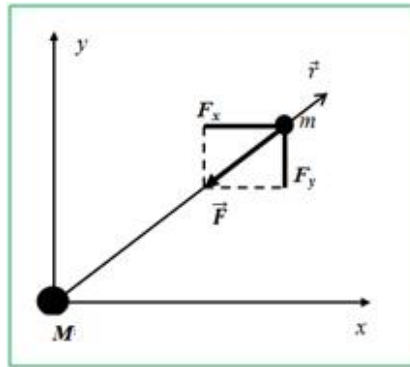
Сонымен қатар, дене қозғалысын механикалық энергияның сақталу заңының шарттары шектейді:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma m M}{|\vec{r}|}$$

немесе

$$[\dot{\vec{r}} \times \vec{p}] - \frac{\gamma m M}{|\vec{r}|} \vec{r} = \text{const}$$

Қозғалыс теңдеулерін шешу үшін координата басында масса центрі орналасқан тік бұрышты координаталар жүйесін аламыз (Сурет 1).



Сурет 1- Центрлік күш өрісінде орналасқан дене

(1) қозғалыс теңдеулері таңдап алынған координаталар жүйесінде мынандай дифференциалдық теңдеулер түрінде болады:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\gamma M}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{\gamma M}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y \quad (3)$$

(2) және (3) теңдеулерді сандық әдіспен шешеміз. Ол үшін алдымен өлшемсіздендіру (обезразмеривание) амалын жасаймыз [6]. Егер қашықтықтың және уақыттың өлшем бірлігі ретінде планетаның орбитасының радиусы мен оның Күнді айналу периоды алсақ, онда шеңбер бойымен қозғалаған дене үшін мынандай өлшемсіз айнымалыларды енгізе аламыз: $X = x/R$; $Y = y/R$; $\tau = t/T$.

(2) және (3) теңдеулер үшін $x \rightarrow X$, $y \rightarrow Y$, $t \rightarrow \tau$ айнымалыларын жазамыз:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = - \frac{\gamma M T^2}{R^3 (X^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}} X \quad (4)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} = - \frac{\gamma M T^2}{R^3 (X^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}} Y \quad (5)$$

Дене шеңбер бойымен қозғалған кездегі центрге тартқыш үдеудің a шамасы орбитаның радиусы $|\vec{R}|$ және дене жылдамдығы $|\vec{v}|$ мен төмендегідей байланыста болады:

$$a = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{R}|} = \frac{v^2}{R} = \frac{\gamma m M}{R^2}$$

Бұдан мынаны табамыз:

$$|\vec{v}| = \left(\frac{\gamma M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

(6) өрнек көмегімен дөңгелек орбита бойымен қозғалаған дененің периодының орбита радиусына тәуелділігін табуға болады. Қозғалыс периоды

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} \quad (7)$$

(6) өрнекті (7) ге қойсақ: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{\gamma M}}$ (8)

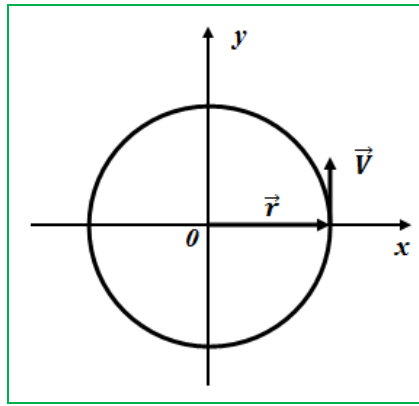
(8) өрнекті (4) және (5) ге қойып, толықтай өлшемсізденген теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = - \frac{4\pi^2}{(X^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}} X \quad (9)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} = - \frac{4\pi^2}{(X^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}} Y \quad (10)$$

(9) және (10) теңдеулерден олардың универсальдылығын көруге болады: теңдеулер дененің өріс центрін айнала қозғалысының периодына және орбитаның радиусына тәуелсіз. Демек, (4) және (5) теңдеулер құрамындағы T^2/R^3 шама гравитациялық өрістегі тұйық траекториямен қозғалған барлық денелер үшін ортақ болады. Бұл тұжырым Кеплердің үшінші заңының орындалатынын тағы да бекітіп тұр.

Дифференциалдық теңдеулерді шешу кезінде бастапқы уақыт моментінде дене радиус-векторы $\vec{r}^3 = (R, 0)$ болатын нүктеде, ал дене жылдамдығы вертикаль жоғары бағытталған $\vec{v} = (0, v)$ болсын (Сурет 2).



Сурет 2 - Центрілік күш өрісіндегі дененің жылдамдығы

(9) және (10) теңдеулер өлшемсіз болғандықтан, алғашқы шарттарды да өлшемсіздендіру керек. $\vec{r} = \vec{\rho} \cdot R$, $t = \tau \cdot T$ түріндегі алмастыруларды жасай отырып алғашқы шарттарды мына түрге келтіреміз:

$$\vec{\rho} = (1, 0), \quad (11)$$

$$\vec{V} = (0, v \frac{T}{R}). \quad (12)$$

Мұндағы T (8) өрнекпен анықталады.

Еске сала кететін бір жағдай, Кеплер заңдарын тексеру үшін R , T , M шамалардың сандық мәнін білудің қажеті жоқ. Өйткені өлшемсізденген алғашқы шарттар да универсальды болады. (6) және (8) ті (12) ге қойсақ өлшемсізденген жылдамдықты табамыз:

$$\vec{V} = (0, 2\pi).$$

Демек, дөңгелек емес орбитаны алу үшін 2π дан өзгеше жылдамдық мәнін берсек жеткілікті.

2. Кеплердің бірінші заңына қатысты мәліметтердісандық әдіспен тексеру. MathCAD қолданбалы программалар пакетін қолданып (9) және (10) дифференциалдық теңдеулерді шешеміз. Программа мынандай блоктардан тұрады [7].

1) Вектордың алғашқы шарттарының берілуі:

$$Z1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \cdot \pi \cdot 1.3 \end{pmatrix}$$

2) Эллипс фокусының координаталарының берілуі: $X0 := 0$; $Y0 := 0$

3) Бірінші туындылардың мәндерін қайтаратын вектор-функцияның берілуі:

$$D(t, z) := \begin{bmatrix} z_1 \\ -4 \cdot \pi^2 \cdot z_0 \\ \frac{3}{2} \\ [(z_0)^2 + (z_2)^2]^{\frac{3}{2}} \\ z_3 \\ -4 \cdot \pi^2 \cdot z_2 \\ \frac{3}{2} \\ [(z_0)^2 + (z_2)^2]^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

4) Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі ізделетін нүктелер саны:
N:=4000

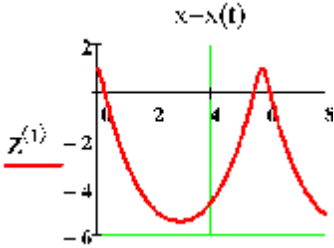
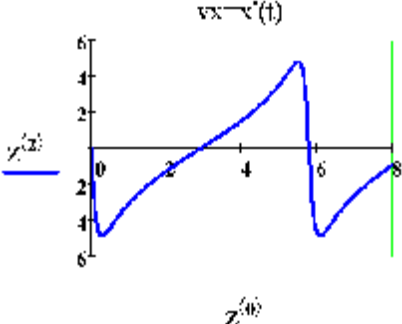
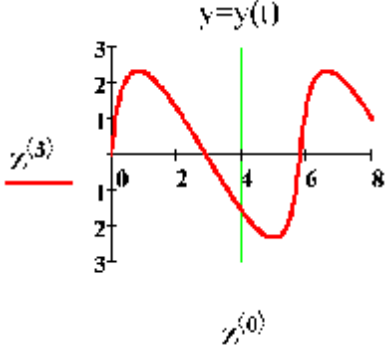
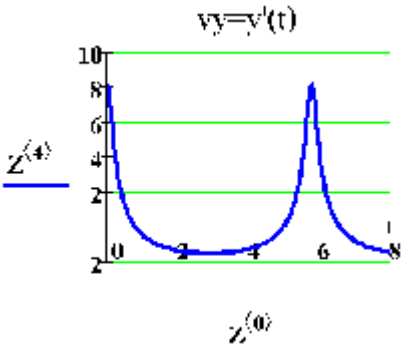
5) Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі ізделетін уақыт интервалының оң жағының берілуі:

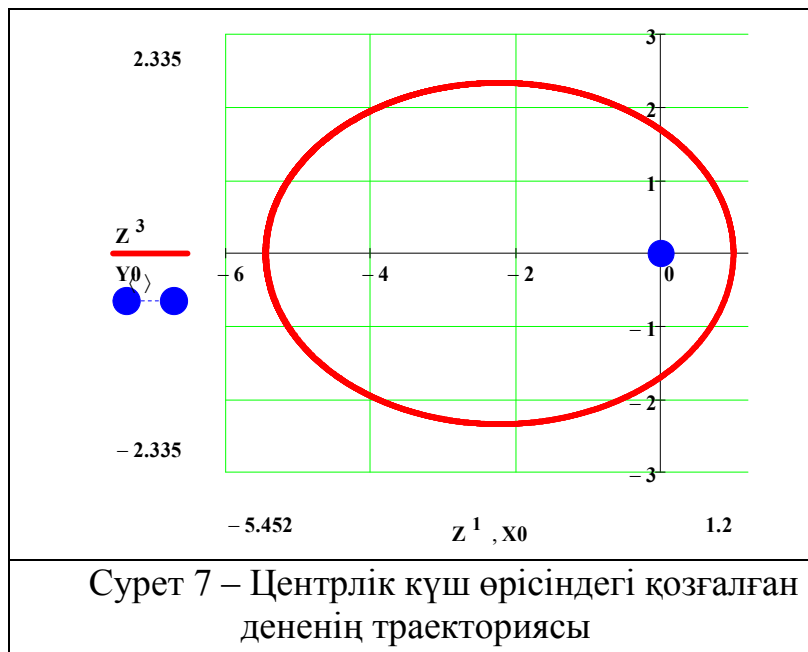
$$T_{\text{finish}} := 8$$

6) Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$Z := \text{rkfixed}(Z1, 0, T_{\text{finish}}, N, D)$$

7) Қозғалыстың кинематикалық сипаттамаларын салу (3-7 суреттер):

	
<p>Сурет 3 – $x=x(t)$ тәуелділігінің графигі</p>	<p>Сурет 4 – $v_x = v(t)$ тәуелділігінің графигі</p>
	
<p>Сурет 5 – $y=y(t)$ тәуелділігінің графигі</p>	<p>Сурет 6 – $v_y = v(t)$ тәуелділігінің графигі</p>



8) Орбитаның эксцентриситетін есептеу

а) $x(t)$ және $y(t)$ тәуелділіктер бар бағанды бөліп алу:

$$X:=Z^{<1>} \quad Y:=Z^{<3>}$$

б) X және Y массивтерінің минимум және максимум мәндерін анықтау:

$$\text{Min}_X:=\min(X) \quad \text{Max}_X:=\max(X)$$

$$\text{Min}_Y:=\min(Y) \quad \text{Max}_Y:=\max(Y)$$

в) Эллипстің жарты осьтерінің ұзындығын табу:

$$a:=\frac{\text{Max}_X-\text{Min}_X}{2} \quad b:=\frac{\text{Max}_Y-\text{Min}_Y}{2}$$

$$a:=3.226 \quad b:=2.335$$

г) Эллипстің эксцентриситетін есептеу:

$$e:=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ if } a \geq b$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2} \text{ if } a < b$$

$$e = 0.69$$

3. Кеплердің екінші заңын Mathcad пакеті көмегімен зерттеу. Кеплердің екінші заңын еске түсіреміз: Күн жүйесіндегі планеталардың әрқайсысының радиус-векторының кеңістіктегі бірлік уақыттағы сызған ауданы әрқашан тұрақты болады. Бұл заңның математикалық өрнегі мынандай:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.} \quad (13)$$

Мұндағы r – планетаның немесе ЖЖС-нің радиус – векторы, φ - полярлық бұрыш [7].

7 суретте Кеплердің екінші заңын графикалық түрге келтіруге арналған MathCAD ортасында жасалған программа көрсетілген (Сурет 7). Осы программа көмегімен табиғаты гравитациялық центрлік күш өрісінде қозғалған дененің траекториясын сол дененің радиус-векторы сызған ауданмен бірге беруге болады (Сурет 8).

<pre> S: r ← 0 K ← 0 for i ← NStart - NStart NLength K ← i - N if i > N K ← 1 otherwise (ZK,1) x1 ← ZK,3 0 (ZK-1,1) x2 ← ZK-1,3 0 s ← x1 × x2 · 0.5 - s r S 1.64179599 </pre>	
<p>Сурет 7 – MathCAD ортасында жасалған программа</p>	<p>Сурет 8 - Центрлік күш өрісіндегі қозғалған дененің траекториясын сол дененің радиус-векторы сызған ауданмен бірге салу</p>

Зерттеу нәтижелерін талқылау және қорытынды

Гравитациялық центрлік күштің өрісіндегі дене қозғалысын сипаттайтын заңдылықтар сандық әдістер көмегімен зерттелді. Аспан механикасы, компьютерлік физика және сандық талдау әдістері көмегімен өзара тартылыста болатын екі дененің гравитациялық өрісінің сипаттамалары зерттелді. Компьютерлік құрал ретінде Mathcad ППП қолданылды [8-11].

Аталған мәселелерді зерттеу барысында төмендегі нәтижелер алынды:

1. Сандық талдау арқылы оқшауланған екі аспан денесінің өзара әрекеттесуін сипаттайтын параметрлер есептелді.

2. Аспан денелері қозғалысын сипаттайтын Кеплер заңдары Mathcad пакеті көмегімен зерттелді.

3. Өзара гравитациялық тартылыстағы екі дененің бірінің массасы екіншісінен өте үлкен болған жағдайдағы екінші дененің эллипс түріндегі орбитасының эксцентриситеті есептелді.

4. Mathcad пакеті көмегімен планета орбитасының жарты осьтерінің ұзындығы есептелді және центрлік күш өрісінде қозғалған дененің траекториясы сол дененің радиус-векторы сызған ауданмен берілетіні дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі

1. Очков В. MathCAD 14 для студентов, инженеров и конструкторов. – Санкт-Петербург. – 2007.- 370 с.
2. Кирьянов Д. Mathcad 14 в подлиннике. Санкт-Петербург. – 2007.- 682 с.
3. Мукушев Б.А. Вывод формулы силы гравитации на основе законов Кеплера // Абай атындағы ҚазҰПУ жаршысы. - 2014, №4
4. Стручков В.В., Яворский Б.М. Вопросы современной физики.- М.: Просвещение, - 1973.
5. Р.Фейнман и др. Фейнмановские лекции по физике 1том. – Издательство «Мир» - М.:1977. – 432 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики (Механика) – М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. - 560 с
7. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы / Глав.ред. физ.-мат. лит. — М.: Наука, 1968.
8. Vlasukova L., Komarov F., Milchanin O., Makhavikou M., Mudryi A., Zhivulko V., Žuk J., Kopyciński P. , Murzalinov D. Origin of visible photoluminescence from Si-rich and N-rich silicon nitride films. // Thin Solid Films. – Vol. 626. – 2017. – P. 70–75.
9. Mukushev B.A., Zheldybaeva B.S., Musatayeva I.S., Mukushev B.A., Kariev K.U., Turdina A.B. Formation of the scientific worldview in schoolchildren based on the inclusion of synergetic ideas in the content of education // Integratsiya obrazovaniya = Integration of education. 2018. T.22, No. 4. Pp. 632-646.) DOI: 10.15507 / 1991-9468.093.022.201804.632-647.
10. Murzalinov D., Akilbekov A., Dauletbekova A., Vlasukova L., Makhavikov M., Zdorovets M. Structural transformations of S-rich SiNx film on Si via swift heavy ions irradiation. // Materials Research Express .- 2018.-Vol. 5. – Iss.3.- № 035035
11. B.A.Mukushev, M. Beresnev, O. V. Bondar. Comparison of Tribological Characteristics of Nanostructured TiN, MoN, and TiN/MoN Arc-PVD Coatings // Journal of Friction and Wear, 2014, Vol. 35, No. 5, pp. 374–382. © Allerton Press, Inc., 2014.

References

1. Ochkov V. MathCAD 14 for students, engineers and designers. - St. Petersburg. - 2007.- 370 p.
2. Kiryanov D.A. Mathcad 14 in the original. St. Petersburg: 2007.- 684 p.
3. Mukushev B. A. Derivation of the gravity force formula based on Kepler's laws // Bulletin of the Kazakh National Pedagogical University named after Abai. - 2014, № 4.
4. Struchkov V.V., Jaworski B.M. Questions of modern physics, M .: Education, - 1973.
5. Feynman R, Leighton R., Sands M. The Feynman Lectures on Physics. M .: - World, 1977. 420 p.
6. Sivukhin D.V. The general course of physics (mechanics) - M .: FIZMATLIT; MIPT Publishing House, 2005. – 560.

7. Duboshin G.N. Celestial mechanics: Analytical and qualitative methods. M.: Nauka, 1964 - 540 p.

8. Vlasukova L., Komarov F., Milchanin O., Makhavikou M., Mudryi A., Zhivulko V., Žuk J., Kopyciński P., Murzalinov D. Origin of visible photoluminescence from Si-rich and N-rich silicon nitride films. // Thin Solid Films. – Vol. 626. – 2017. – P. 70–75.

9. Mukushev B.A., Zheldybaeva B.S., Musatayeva I.S., Mukushev B.A., Kariev K.U., Turdina A.B. Formation of the scientific worldview in schoolchildren based on the inclusion of synergetic ideas in the content of education // Integratsiya obrazovaniya = Integration of education. 2018. T.22, No. 4. Pp. 632-646.) DOI: 10.15507 / 1991-9468.093.022.201804.632-647.

10. Murzalinov D., Akilbekov A., Dauletbekova A., Vlasukova L., Makhavikov M., Zdorovets M. Structural transformations of S-rich SiN_x film on Si via swift heavy ions irradiation. // Materials Research Express. - 2018.-Vol. 5. – Iss.3.- № 035035

11. B.A. Mukushev, M. Beresnev, O. V. Bondar. Comparison of Tribological Characteristics of Nanostructured TiN, MoN, and TiN/MoN Arc-PVD Coatings // Journal of Friction and Wear, 2014, Vol. 35, No. 5, pp. 374–382. © Allerton Press, Inc., 2014.

ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ПОСРЕДСТВОМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Мукушев Б.А. д.п.н., профессор

*Казахский агротехнический университет им.С.Сейфуллина
Республика Казахстан, г. Нур-Султан, проспект Женис, 62.*

mba-55@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена исследованию движений небесных тел в поле центральной гравитационной силы. Рассмотрены дифференциальные уравнения, характеризующие движения двух взаимодействующих тел. Для этих уравнений был использован прием обезразмеривания. Дифференциальные уравнения были решены в графическом виде посредством пакета прикладных программ MathCAD. Получены численные данные посредством пакета прикладных программ, относящиеся к первому и второму законам Кеплера.

Посредством пакета прикладных программ Mathcad изучены первый и второй законы Кеплера и получены численные и графические результаты движения тела в поле центральных сил. Вычислен эксцентриситет эллиптической орбиты тела и определена длина полуосей этой орбиты на основе численных методов. Представлены расчеты по определению площади,

которая за равные промежутки времени описывается радиус-вектором планеты. Таким образом доказано, что секториальная скорость планеты постоянная величина.

Ключевые слова: задача о двух тел, гравитационное поле, дифференциальные уравнения, численные методы, пакет Mathcad, законы Кеплера, секториальная скорость.

STUDY OF THE MOTION OF A BODY IN A CENTRAL GRAVITATIONAL FIELD BY NUMERICAL METHODS

*Mukushev B.A. doctor of pedagogical sciences, professor,
S.Seifullin Kazakh Agrotechnical University, 010011, Republic of Kazakhstan,
Nur-Sultan, Zhenis Avenue, 62.
mba-55@mail.ru*

Abstract

The article is devoted to the study of the movements of celestial bodies in the field of the central gravitational force. The differential equations of motion of two interacting bodies are considered. For these equations, the method of de-dimensionalization was used. The differential equations were solved graphically using the MathCAD package. Numerical data of the first and second Kepler laws are obtained by numerical methods.

Numerical and graphical results of the motion of a body in the field of central forces are studied using the Mathcad package. The eccentricity of the elliptical orbit of the body is calculated and the length of the semi-axes of this orbit is determined on the basis of numerical methods. It is proved that the sectorial velocity of the planet is a constant value.

Keywords: two-body problem, gravitational field, central symmetric force, numerical methods, Mathcad package, Kepler's laws, sectorial velocity.