

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОЖАЙНОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР НА ОСНОВЕ ГИДРОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ПРОИЗВОДСТВА

*Кусаинов Т.А.*

### *Аннотация*

В Северном Казахстане критическое значение для формирования урожайности имеет влага. К началу посевной кампании неопределенность в отношении уровня влаги для вызревания культур существенно сокращается по той причине, что становится уже известным количество влаги в почве за счет зимних осадков. Данное обстоятельство позволяет построить более точную модель урожайности в плановый год. При этом в большинстве случаев имеет место стохастическая взаимозависимость урожайности сельскохозяйственных культур. Поэтому при расчете экономически эффективной структуры и сочетания посевов необходимо учитывать совместное распределение вероятности урожайности разных культур. Соответствующая методика оценки статистического распределения урожайности разных культур в их взаимосвязи представлена автором.

**Ключевые слова:** прогнозирование, риск, неопределенность, урожайность, вероятность, статистическая модель.

### *Введение*

Определяющей тенденцией современных прикладных исследований является использование научных подходов, позволяющих принимать решения на основе как объективных данных, получаемых при испытаниях, так и неформального опыта исследователя. Принимать решения приходится в условиях неопределенности, что предполагает необходимость принятия во внимание хозяйственного риска. Принять риск означает допустить значительный шанс экономических

потерь в виде прямых убытков или стоимости упущенной выгоды. В таких случаях время и усилия, требуемые для формальной структуризации проблемы, сбора необходимой информации и анализа вариантов решения задачи с точки зрения возможных последствий вполне оправданы, если они ведут к лучшему в определенном смысле выбору.

В растениеводстве выбор сельскохозяйственным предпринимателем того или иного набора культур, масштаба и структуры посевов осуществляется

прежде всего из экономических соображений, из анализа по принципу "доход-риск". Разные решения, принимаемые перед началом сельскохозяйственных работ по поводу сочетания и структуры посевов, дают разные оценки ожидаемого экономического эффекта от растениеводства. В свою очередь, оценка ожидаемого экономического эффекта строится на прогнозах урожайности товарных культур и цен - как на продукцию, так и на используемые ресурсы.

Однако неопределенность по поводу цен на ресурсы к началу посевов, как правило, оказывается практически уже снятой. Поэтому в зоне внимания остаются два других показателя - урожайность культуры и цена на продукцию.

В Северном Казахстане критическое значение для формирования урожайности имеет влага. Используется влага, накопленная в течение зимнего сезона, а также поступающая в вегетационный период. К началу посевной кампании неопределенность в отношении уровня влаги для вызревания культур в значительной мере сокращается по той причине, что становится уже известным количество влаги в почве за счет зимних осадков. Однако неопределенность уровня урожайности все же сохраняется, хотя и в усеченном виде, поскольку остаются ненадежными прогнозы погодных условий на предстоящий вегетационный период. В редких случаях хозяйства располагают

надежной базой данных по накопленной в почве влаге перед посевом за ряд лет для анализа и принятия решений в растениеводстве. Поэтому в моделировании и прогнозировании урожайности и распределения ее вероятности приходится ограничиваться данными наблюдений о количестве выпавших осадков в рассматриваемый сезон года. Расчеты корреляции между урожайностью сельскохозяйственных культур и количеством осадков в зимний период свидетельствуют о том, что между указанными показателями в Северном Казахстане в целом существует умеренная связь. При этом, связь проявляет себя гораздо более заметно в тех хозяйствах, где проводятся мероприятия по накоплению в почве зимней влаги.

В задачах планирования сельскохозяйственных посевов оценка статистической модели урожайности культур может быть проведена двумя способами. Один из них заключается в построении модели урожайности отдельно по каждой культуре вне связи с другими культурами. Такой подход оправдан только в том случае, если переменные (урожайности культур) стохастически независимы друг от друга. Переменные считаются стохастически взаимно независимыми, если распределение вероятности одной из них не зависит от значений вероятности, принимаемых другой. На практике, однако, полная стохастическая

независимость переменных является скорее исключением, чем правилом. Игнорирование взаимозависимости переменных величин в планировании может привести к неприемлемым, ошибочным решениям. С другой стороны, учет стохастической взаимосвязи в урожайности разных культур представляет собой достаточно сложную задачу в принятии решения. Поэтому в тех редких случаях, когда ковариация переменных считается несущественной, позволительно проигнорировать данную проблему. Например, имеет место явная стохастическая взаимосвязь в колебаниях урожайности зерновых культур. Но в отношении урожайности пшеницы и урожайности картофеля вряд ли можно утверждать подобное – связь, скорее всего, отсутствует.

В большинстве случаев имеет место стохастическая взаимозависимость переменных величин, в нашем случае – урожайности сельскохозяйственных культур. И если при этом ставится задача расчета экономически эффективной структуры и сочетания посевов, то в соответствующей оптимизационной риск-модели необходимо учесть факт *совместного распределения* вероятности урожайности разных культур. Задача совсем не из легких, и требует выработки и применения методических приемов и процедур, позволяющих учесть взаимосвязь в изменении

уровней переменных, участвующих в анализе.

### ***Материалы и методы***

Если имеются ретроспективные данные достаточного объема и существует возможность делать на их основе вполне определенные суждения относительно вероятности события, то рациональный индивидуум, очевидно, примет их во внимание. Эти данные могут быть прямо использованы в анализе. Процедуры оценки статистической модели урожайности основаны на предположении, что для стохастической взаимозависимости переменных величин должны быть определенные причины. Путем выявления таких причин и моделирования связи между ними и рассматриваемыми переменными можно приближенно оценить основные свойства совместного распределения вероятности изучаемых переменных величин. В отношении формирования урожайности сельскохозяйственных культур, как уже отмечалось, в Северном Казахстане ключевое значение имеет влага и температурный режим, особенно в критические для развития растения моменты. Большое значение имеют также изменения в технологии производства, которые в большинстве случаев являются причиной наличия тренда в динамическом ряду. Однако технология является управляемым фактором. Поэтому в случае, когда временной ряд по урожайности достаточно длинный и имеются

основания полагать, что в течение рассматриваемого периода происходили улучшения в технологии выращивания культуры, динамический ряд необходимо вначале очистить от влияния тренда. В отношении стоимостных переменных, например, дохода, ряды данных необходимо корректировать на инфляцию, а также на возможный тренд в динамике цен на сельхозпродукцию.

Для моделирования связи между урожайностью и гидротермическими условиями весьма перспективным представляется использование мультипликативной модели Кобба-Дугласа. Рациональная основа для особенности:

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_k^{b_k}, \quad (1)$$

где коэффициенты  $b_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , соответствуют коэффициентам эластичности факторов при сколь угодно малом приращении соответствующих факторов  $x_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ .

Предлагаемые методические процедуры прогнозирования статистического распределения урожайности с использованием мультипликативной модели рассмотрим на примере производства пшеницы в АО "Акмола Феникс". В условиях предприятия в качестве факторных переменных взяты следующие

такого предположения состоит в том, что степень влияния гидротермических условий вегетационного периода на развитие растения и формирование урожайности в существенной мере предопределяется уровнем увлажненности почвы за счет зимних осадков. И наоборот, действенность накопленной зимней влаги в определенной мере зависит от погодных факторов в сезон выращивания культуры. Другими словами, влияние факторов на результат нельзя рассматривать изолированно друг от друга. Мультипликативная модель регрессии позволяет учесть указанную

показатели: суммарный объем осадков за сентябрь-апрель (накопленная влага), суммарные осадки за май-август (вегетационный сезон, также температура в июне. В таблице 1 приведены данные по урожайности яровой пшеницы, а также гидротермическим условиям в период с 1980 по 2011 г.г.

Таблица 1 - Урожайность яровой пшеницы и гидротермические данные по АО "Акмола Феникс" за 1980-2011 г.г.

Год	Темпе- ратура в июне, С	Осадки в сентябре- апреле, мм	Осадки в мае- августе , мм	Урожа й- ность, ц/га	Год	Темпе- ратура в июне, С	Осадки в сентяб- ре- апреле, мм	Осадки в мае- августе , мм	Урожа й- ность, ц/га
1980	18,6	122 <sup>1</sup>	216	10,3	1996	19,8	232	121	14,2
1981	20,1	146	134	10,5	1997	19,8	153	102	8,9
1982	20,8	111	109	6,5	1998	21,7	117	137	6,5
1983	20,0	196	114	14,5	1999	15,1	108	191	13,2
1984	18,8	168	83	8,7	2000	19,6	133	149	6,9
1985	18,8	236	146	22,6	2001	18,4	164	189	8,9
1986	16,4	172	143	22,3	2002	17,3	248	159	10,2
1987	18,3	181	152	21,3	2003	18,3	145	181	13,8
1988	21,1	172	158	15,2	2004	19,9	158	168	9,5
1989	18,9	165	99	11,6	2005	20,6	174	177	9,6
1990	21,5	211	206	21,3	2006	21,3	132	128	9,8
1991	23,1	157	68	12,5	2007	18,0	234	139	12,3
1992	16,1	159	222	25,3	2008	20,1	157	184	8,5
1993	18,8	162	198	11,1	2009	18,8	157	177	11,9
1994	22,2	106	190	9,7	2010	21,6	195	80	5,0
1995	18,7	162	169	7,0	2011	19,8	122	214	16,6

Прежде чем приступить к анализу и прогнозированию, необходимо сделать некоторые весьма существенные замечания. Анализ данных из таблицы 1 свидетельствует о том, что в период с 1980 года до середины 90-х годов в хозяйстве наблюдалась достаточно сильная прямая корреляционная связь между урожайностью яровой пшеницы и уровнем зимних осадков: коэффициент корреляции в указанный отрезок времени составил 0,7; менее ощутимая связь имела место между урожайностью и осадками в вегетационный сезон (0,4). Начиная с середины 90-х годов до начала 10-х годов связь между урожайностью и количеством осадков в зимний период практически исчезла: корреляция находилась на уровне нуля. Зато произошло некоторое усиление зависимости урожайности от летнего увлажнения (0,5). При этом, среднегодовое количество осадков, как в зимний период, так и в летний

Оценка связи между температурой в июне и урожайностью свидетельствует о наличии заметной обратной корреляционной зависимости между показателями (-0,5).

С учетом приведенных фактов, для моделирования связи между урожайностью пшеницы и гидротермическими условиями в иллюстративных целях были использованы данные наблюдений за период с 1980 по 1994 г.г.

Тренд в урожайности яровой пшеницы в указанный период практически отсутствовал.

### ***Результаты и обсуждение***

Линеаризованная статистическая модель связи между урожайностью яровой пшеницы, с одной стороны, и зимними и летними осадками и температурой, с другой стороны, в условиях хозяйства приняла следующий вид:

$$\ln(y) = - 3,6412 - 0,7793 \ln x_1 + 1,2917 \ln(x_2) + 0,4077 \ln(x_3), \quad (2)$$

сезон, осталось без изменений. Температурный режим в критические для развития растений периоды (июньские декады) также не претерпел изменений. Указанные обстоятельства говорят лишь об одном: в хозяйстве с середины 90-х годов практически перестали проводить мероприятия по накоплению в почве зимней влаги. Соответственно, средняя урожайность яровой пшеницы существенно снизилась: если в первый из рассматриваемых отрезков времени продуктивность пшеничных полей составляла 14,9 ц/га, то в течение второго периода - лишь 10,2 ц/га. Разумеется, объективно зависимость урожайности культуры от уровня *накопленной* в почве зимней влаги никуда не исчезла. Можно лишь утверждать, что начиная с середины 90-х годов в хозяйстве прекратили заниматься систематически полезной утилизацией выпавших в холодное время года осадков.

где  $x_1$  – температура воздуха в июне,  $x_2$  – объем зимних осадков,  $x_3$  – количество летних осадков.

Оценка модели в целом по  $F$ -критерию Фишера показывает ее значимость на уровне 0,05; коэффициент детерминации составил 0,72. Однако из всех ее параметров существенной по  $t$ -критерию Стьюдента оказывается лишь коэффициент при переменной  $x_2$  (зимние осадки, на уровне доверия  $\alpha=0,01$ ). Коэффициент при переменной по летним осадкам оказывается несущественной даже на уровне  $\alpha=0,1$ ; коэффициент при переменной  $x_3$  (температура) и свободный коэффициент вызывают еще меньшее доверие: в полученном уравнении они становятся существенными лишь на уровне, близком к 0,3. Объяснением приведенной особенности модели может

служить тот факт, что между рядами данных по летним осадкам и температуре имеется корреляционная связь умеренной силы (обратная, -0,3), в то время как между зимними и летними осадками, также как между зимним увлажнением и летней температурой, такая связь практически отсутствует. Таким образом, указанные параметры оказываются слишком чувствительными к любым изменениям в исходных данных, делая модель ненадежной для использования в прогнозировании.

При исключении температуры из анализа уравнение регрессии получается следующего вида

$$\ln(y) = - 6,7458 + 1,3773 \ln x_1 + 0,4796 \ln(x_2). \quad (3)$$

На уровне доверия 0,05 все полученные коэффициенты в уравнении существенны. Расчетная  $F$ -статистика уравнения равна 13,09 при табличном значении 3,89 на уровне значимости 0,05; следовательно, модель значима на данном уровне. Коэффициент детерминации составляет 0,69. Это говорит о достаточно высокой прогнозирующей способности модели. Как видим, коэффициенты

детерминации в уравнениях (2) и (3) оказались практически одинаковыми. Это обстоятельство также свидетельствует в пользу модели (3), даже если бы в модели (2) все коэффициенты оказались существенными: при прочих равных условиях модель с меньшим количеством факторных переменных всегда более предпочтителен.

Перепишем уравнение (3) в мультипликативной форме вида (1):

$$y = 0,001176 x_1^{1,3773} x_2^{0,4796}.$$

В период с сентября 1993 по апрель 1994 года суммарный объем выпавших осадков в хозяйстве составил 106 мм. Следовательно, перед началом посевной на предприятии мы имеем уравнение вида

$$y = 0,001176 \cdot 106^{1,3773} \cdot x_2^{0,4796} = 0,724014 \cdot x_2^{0,4796} \quad (4)$$

Иначе говоря, задача прогнозирования с двумя неизвестными превратилась в задачу с одной неизвестной переменной. Для составления прогнозной статистической модели нам необходимо оценить распределение вероятности осадков в предстоящий вегетационный сезон. Самый простой способ приближенной оценки распределения вероятности осадков состоит в расчете частоты уровней осадков на основе имеющихся данных из прошлых наблюдений. Для этого весь диапазон возможных осадков разбивают на равные интервалы и подсчитывают количество наблюдений, выпадающих на тот или иной интервал. Выявленные таким образом частоты каждого интервала осадков используют в качестве оценок вероятности.

Однако использование частоты в качестве так называемой объективной вероятности весьма ненадежно. На то имеются несколько причин, главная из которых состоит в принципиальной невозможности воспроизведения в будущем всего комплекса условий, имевших место в прошлом. Еще одно немаловажное препятствие для успешного применения приведенной схемы расчетов, заключается в том, что на практике редко удается собрать достаточно большое количество данных. Но

даже наличие полной базы данных об условиях и результатах хозяйственной деятельности в прошлом не является панацеей от ошибок в прогнозировании, анализе и формировании решений. При оцутимом для сельскохозяйственных предпринимателей изменении условий хозяйствования или же при наличии слишком короткой базы данных использование результатов прошлых наблюдений всегда приводит к ошибочным выводам относительно будущего состояния хозяйственной системы. Например, кардинальная смена социально-экономических отношений, имевших место в казахстанском обществе начиная с 90-х годов, вкпе с оцутимым изменением природно-климатических условий заставляют критически переосмыслить производственно-экономические данные за период до середины 90-х годов, прежде чем использовать их в анализе и прогнозировании в изменившихся условиях. Другими словами, далеко не всегда данные о результатах и условиях хозяйственной деятельности, имевших место в прошлом, могут служить рациональной базой для формирования решений по управлению производством в будущем. Поэтому, прагматическую полезность имеют



способы прогнозирования, основанные на использовании данных за прошлые периоды в сочетании с субъективным подходом к оценке вероятности того или иного события. В действительности, оценка вероятности будущего состояния хозяйственной системы *всегда* носит субъективный характер: все вероятности субъективны, даже если они основаны на так называемых объективных данных.

В контексте рассматриваемой проблемы перспективу имеют способы оценки статистической модели показателя, основанные на достаточно простых процедурах и приемах расчета. Один из них состоит в использовании так называемого *треугольного распределения* вероятности. Оно весьма удобно в тех случаях, когда в оценке вероятности какого-либо события преобладают субъективные суждения. Например, при недостаточном количестве наблюдений или же в тех случаях, когда ожидаются существенные изменения в условиях хозяйствования. Другими словами, в ситуациях, когда приходится привлекать экспертов для решения проблемы и полагаться на их опыт

и субъективную оценку. Треугольное распределение вероятности может быть затем с пользой применено при имитации стохастических процессов, для интервальной оценки вероятности (на основе формулы кумулятивного распределения). Кроме того, попутно заметим, что математическое ожидание и вариация распределения могут служить основой для сравнительной оценки разных производств (видов продукции).

В нашем примере по данным наблюдений за 1980-1994 г.г. наиболее ожидаемое количество осадков в летний сезон находилось в пределах 160-170 мм, наименьшее - 68 мм, наибольшее - 222. Оценку вероятности на основе треугольного распределения весьма удобно проводить с использованием функции случайных чисел в среде MS Excel (в нашем примере результаты получены при количестве испытаний 100). В таблице 2 приведена интервальная оценка распределения вероятности осадков в вегетационный период в АО "Акмола Феникс". Число интервалов условно взято равным 5.

Таблица 2 - Интервальная оценка распределения вероятности осадков в вегетационный сезон

Интервал осадков, мм	67,9-98,8	98,8-129,6	129,6-160,5	160,5-191,3	191,3-222,2
Вероятность	0,10	0,14	0,34	0,29	0,13

Далее, используя уравнение (4), проведем оценку статистического распределения урожайности яровой пшеницы в АО "Акмола Феникс". В таблице 3 в иллюстративных целях приведены распределения в период наблюдений – с 1980 г. по 1994 г. В нижней части таблицы показаны значения вероятности каждого из возможных исходов.

Таблица 3 – Статистическое распределение урожайности яровой пшеницы

Год	Интервал урожайности, ц/га				
	< 7,9	< 9,0	< 10,0	< 10,9	< 11,7
1980					
1981	10,2	11,6	12,9	14,0	15,1
1982	6,9	7,9	8,8	9,5	10,2
1983	15,2	17,4	19,2	20,9	22,5
1984	12,3	14,1	15,6	17,0	18,2
1985	19,8	22,5	24,9	27,1	29,2
1986	12,8	14,5	16,1	17,5	18,8
1987	13,7	15,6	17,3	18,8	20,2
1988	12,7	14,5	16,1	17,5	18,8
1989	12,0	13,7	15,2	16,5	17,7
1990	16,9	19,2	21,3	23,1	24,9
1991	11,2	12,8	14,2	15,4	16,6
1992	11,5	13,1	14,5	15,8	17,0
1993	11,8	13,4	14,9	16,2	17,4
1994	6,6	7,5	8,3	9,0	9,7
Вероятность	0,10	0,14	0,34	0,29	0,13
Примечание. Верхняя граница предыдущего интервала одновременно означает нижнюю границу последующего интервала					

Заметим, что среднегодовая за рассмотренный период урожайность яровой пшеницы в АО "Акмола Феникс" составляет 14,9 ц/га. И если предсказывать урожайность по ее среднему многолетнему уровню, то в годы с низким уровнем зимних осадков мы получим явно завышенный прогноз. И наоборот, будет иметь место заниженный прогноз, если уровень зимних осадков окажется выше своего среднего многолетнего значения. Как видим, методические приемы расчета статистической модели, основанные на принципах Байеса, дают более обоснованные прогнозы и позволяют избежать слишком

оптимистичных или, напротив, пессимистичных оценок урожайности.

По этой же схеме рассчитываются прогнозы статистического распределения по другим сельскохозяйственным культурам, выращиваемым в хозяйстве. Полученные таким образом статистические распределения урожайности культур затем используются в задаче по оптимизации структуры и сочетания посевов на предприятии в условиях неопределенности.

### ***Заключение***

В условиях АО "Акмола Феникс" моделирование статистического распределения урожайности сельскохозяйственных культур с использованием таких факторов как уровень зимних осадков и уровень летних осадков дает вполне удовлетворительные результаты. При этом модель позволяет привлечь достаточно простые процедуры для оценки вероятностных свойств прогноза. Методику можно рекомендовать для использования в хозяйствах, где ведется систематический учет содержания влаги в почве перед посевом. Особенно на тех предприятиях, где ежегодно проводятся мероприятия по накоплению зимней влаги в почве и, как следствие, наблюдается существенная корреляционная связь между урожайностью культур

и уровнем осадков в зимний период.

Вместе с тем, необходимо отметить, что приведенная методика прогнозирования дает приближенное представление о статистическом распределении урожайности сельскохозяйственных культур. Вовлечение в анализ дополнительных факторов неопределенности может в принципе улучшить качество прогнозной модели. Однако при этом заметно усложнится процедура анализа вероятностных характеристик прогноза. В любом случае, на практике, где грубое приближение может быть лучше, чем вообще никакое, приведенный способ расчета статистического распределения урожайности имеет прагматическую полезность.

### *Список литературы*

1. Jeffreys, H. Theory of Probability.- Oxford: Clarendon Press, 1966.- 428 с.
2. Бернулли Я. О законе больших чисел.- М.: Наука, 1986.- 176 с.
3. De Finetti, B. Bayesianism: its role for both the foundations and applications of statistics//Internat. Statist. Rev.- 1974.- V.42, №1.- pp. 117-130.
4. Cornfield, T. The Bayesian Outlook and Its Application//Review Int. Stat. Inst.- 1967.- V.35, №1.- p.p. 34-39.
5. Mizes von, R. Mathematical theory of probability and statistics.- New York: Acad. Press, 1964.- 360 с.
6. Hardaker, J.B., Huirne, R.B.M. and Anderson, J.R. (1997) Coping with Risk in Agriculture. Wallingford, CAB International, 1997.
7. Hardaker, J.B., Huirne, R.B.M., Anderson, J.R. and Lien, G. (2004) Coping with risk in Agriculture. CAB International, Wallingford.
8. Кусаинов Т.А. Наука управления риском в сельском хозяйстве. Астана, 2001, 127 с.
9. Кусаинов Т.А. Анализ, прогнозирование и принятие решений. Астана, 2011, 229 с.

10. Samuelson P.A. General proof that diversification pays// J. Financ. Quant. Anal. 1967. №2(1). P. 1-12.

### **Түйін**

Солтүстік Қазақстанда өсімдік шаруашылығында өнімділікті қалыптастыру үшін ылғалдың маңызы өте зор. Қысқы маусымда жинақталған және вегетациялық кезеңде түскен ылғал пайдаланылады. Егіс науқанының басында ылғалға қатысты анықсыздық қысқарады, себебі қысқы жауын-шашын есебінен топырақтағы ылғалдың деңгейі белгілі болады. Бұл жағдай жоспарлы жылда күтілетін өнімділік моделін жақсартуға жол береді. Соған тиісті статистикалық модель ұсынылып отыр.

### **Summary**

In Northern Kazakhstan, critical factor for yield formation is moisture. There is used the moisture accumulated during the winter season, and the one which comes during the growing season. By the beginning of the sowing season, the uncertainty of the level of moisture necessary for crops is largely reduced for the reason that the quantity of moisture in the soil due to winter precipitation becomes known. This fact allows us to obtain a more accurate model of productivity in the planned year. In most cases there is a stochastic interdependence of crop yields. Therefore, when calculating the economically efficient structure and combination of crops it is necessary to take into account the joint probability distribution of yields of different crops. Appropriate method of estimating the statistical distribution of yields is presented by the author.