С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым Жаршысы// Вестник Науки** Казахского агротехнического университета имени С. Сейфуллина. - 2016. **– № 2(89)**. - С.161-167

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СТОКСА

Дюсембаева Л.К., Куттыкожаева Ш.Н., Нурпейсова А.А.

Аннотация

Предложен метод решения задач Стокса, основанный на минимизации функционала, являющегося квадратом нормы дивергенции вектора скорости. Для этого применяется итерационный метод. Исследованы свойства функционала. Доказана сходимость последовательности приближений к решению задач Стокса. В связи с развитием вычислительных и информационных технологий, вопросы численного решения уравнений Стокса привлекают к себе большое внимание математиков и механиков, поэтому разработка эффективных вычислительных алгоритмов и математическое обоснование методов решения уравнений Стокса являются актуальной задачей вычислительной математики. Актуальность данной темы исследования подтверждается также многочисленными публикациями различных авторов во всем мире по вопросам численного моделирования задач Навье - Стокса.

Ключевые слова: метод, область, жидкость, итерационный метод, пространство.

Рассмотрим в ограниченной области Ω с границей S краевую задачу для уравнения Стокса

$$\mu\Delta v - \nabla p = f, \tag{1}$$

$$div\, v = 0, \quad v\big|_S = 0 \tag{2}$$

Задача (1),(2) была исследована в работах [1], [2] методом фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам

$$\mu\Delta v^{\varepsilon} - \nabla p^{\varepsilon} - \frac{\xi(x)}{\varepsilon} v^{\varepsilon} = f, \quad \text{в } D \quad div\, v^{\varepsilon} = 0, \tag{3}$$

$$v^{\varepsilon}\cdot\tau\big|_{S_1} = 0; \quad p^{\varepsilon}\big|_{S_1} = 0 \tag{4}$$

где область D, строго содержит в себе область Ω, S_1 — граница области D. На практике в качестве области D берется прямоугольник или квадрат. τ — касательный вектор к границе S_1. Для простоты будем предполагать $D=(0,l_1)\times(0,l_2)$ — прямоугольник.

В [1] исследована сходимость решения задачи (3)-(4) к решению задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

Будем решать задачу (3)-(4) методом конечных разностей. Построим три пространственные сетки

$$\overline{\omega}_h=\left\{x=\left(x_{1i-1/2},x_{2j}\right)=\left((i-1/2)h,\,jh\right),\ i=\overline{0,N_1+1},\quad j=\overline{0,N_2}\right\},\ \gamma_1=\left(\overline{\omega}\setminus\omega_h\right),$$

$$Q_h=\left\{x=\left(x_{1i-1/2},x_{2j}\right)=\left((i-1/2)h,\,jh\right),\ i=\overline{0,N_1+1},\quad j=\overline{0,N_2}\right\},$$

границу $\partial Q_h=\overline{Q}_h\setminus Q_h=\partial Q_h^1\cup\partial Q_h^2\cup\partial Q_h^3\cup\partial Q_h^4$

где: $h=l_1/N_1=l_2/N_2$,

$$\partial Q_h^1=\left\{\left(x_{1-1/2},x_{2j}\right)=\left(-1/2h,\,jh\right),\ j=\overline{0,N_2}\right\},$$

$$\partial Q_h^2=\left\{\left(x_{1i-1/2},x_{20}\right)=\left((i-1/2)h,0\right),\ i=\overline{0,N_1}\right\},$$

$$\partial Q_h^3=\left\{\left(x_{1N_1+1/2},x_{2j}\right)=\left((N_1+1/2)h,\,jh\right),\ j=\overline{0,N_2}\right\},$$

$$\partial Q_h^4=\left\{\left(x_{1i-1/2},x_{2N_2}\right)=\left((i-1/2)h,N_2h\right),\ i=\overline{0,N_1+1}\right\},$$

$$\overline{G}_h=\left\{\left(x_1,x_{2j-1/2}\right)=\left(ih,(j-1/2)h\right),\ i=\overline{0,N_1},\ j=\overline{0,N_2+1}\right\},$$

границу

$$\partial G_h=\overline{G}_h\setminus G_h=\partial G_h^1\cup\partial G_h^2\cup\partial G_h^3\cup\partial G_h^4$$

$$\partial G_h^1=\left\{\left(x_{1i},x_{2-1/2}\right)=\left(ih,-1/2h\right),\ i=\overline{0,N_1}\right\},$$

$$\partial G_h^2=\left\{\left(x_{1N_1},x_{2j-1/2}\right)=\left(N_1h,(j-1/2)h\right),\ j=\overline{0,N_2+1}\right\},$$

$$\partial G_h^3=\left\{\left(x_1,x_{2N_2+1/2}\right)=\left(ih,(N_2+1/2)h\right),\ i=\overline{0,N_1}\right\},$$

$$\partial G_h^4 = \left\{ \left(x_{10}, x_{2\,j-1/2} \right) = \left(0, \left(j - 1/2 \right) h \right),\ \ j = \overline{0, N_2 + 1} \right\}.$$

Дальнейшие обозначения взяты из работы [3]. Рассмотрим разностную схему, аппроксимирующую задачу (3), (4):

$$\mu \Delta_h \upsilon_1 - p_{\bar{x}_1} - \frac{\xi_h(x)}{\varepsilon} \upsilon_1 = f_{1h} \ \text{ в } Q_h,$$

$$\mu \Delta_h \upsilon_2 - p_{\bar{x}_2} - \frac{\xi_h(x)}{\varepsilon} \upsilon_2 = f_{2h} \ \text{ в } G_h, \tag{5}$$

$$div_h \upsilon = \upsilon_{1x_1} + \upsilon_{2x_2} = 0 \ \text{ в } \omega_h,$$

с граничными условиями

$$\upsilon_{2\bar{x}_1}\Big|_{\partial Q_h^1} = \upsilon_{1\bar{x}_1}\Big|_{\partial Q_h^3} = 0, \quad \upsilon_1\Big|_{\partial Q_h^2} = \upsilon_1\Big|_{\partial Q_h^4} = 0,$$

$$\upsilon_{2x_2}\Big|_{\partial G_h^1} = \upsilon_{2\bar{x}_2}\Big|_{\partial G_h^3} = 0, \quad \upsilon_2\Big|_{\partial G_h^2} = \upsilon_2\Big|_{\partial G_h^4} = 0, \quad p\Big|_{\gamma_1} = 0, \tag{6}$$

где Δ_h — разностная аппроксимация оператора Лапласа. Находим решение задачи (5), (6) итерационным методом.

Рассмотрим неявную схему типа крупных частиц [4]

$$\frac{\upsilon_1^{n+1/2} - \upsilon_1^n}{\tau} = -p_{\bar{x}_1}^n - \frac{\xi(x)}{\varepsilon} \upsilon_1^{n+1/2} + \mu \Delta_h \upsilon_1^{n+1/2} + f_1, \tag{7}$$

$$\frac{\upsilon_2^{n+1/2} - \upsilon_2^n}{\tau} = -p_{\bar{x}_2}^n - \frac{\xi(x)}{\varepsilon} \upsilon_2^{n+1/2} + \mu \Delta_h \upsilon_2^{n+1/2} + f_2, \tag{8}$$

$$\frac{\upsilon_1^{n+1} - \upsilon_1^{n+1/2}}{\tau} = -\left(p^{n+1} - p^n \right)_{\bar{x}_1}, \tag{9}$$

$$\frac{\upsilon_2^{n+1} - \upsilon_2^{n+1/2}}{\tau} = -\left(p^{n+1} - p^n \right)_{\bar{x}_2}, \tag{10}$$

$$div_h \upsilon^{n+1} = \upsilon_{1x_1}^{n+1} + \upsilon_{2x_2}^{n+1} = 0, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

$$\upsilon_1^0 = \upsilon_{01}, \quad \upsilon_2^0 = \upsilon_{02}, \quad p^0 = p_0. \tag{12}$$

Здесь $v^{n+1/2}$, v^{n+1}, p^{n+1} задаются граничные условия (6).

Для давления в силу (9)-(12) получим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$div_h\left(K_h^{\varepsilon}(x)\nabla_h p^{n+1}\right)=F_h\left(v^n, p^n, f\right),$$
$$p^{n+1}\Big|_{\gamma_1}=0,\quad K_h^{\varepsilon}(x)=\frac{\tau}{1+\frac{\xi(x)}{\varepsilon}}.$$

Давление p^{n+1} находится естественным образом, с помощью эффективных итерационных методов, предложенных в работе [5].

Будем исследовать сходимость итерационного метода (7)-(12). Умножим уравнения (7)-(8) на $2\tau v_1^{n+1/2}h^2$, $2\tau v_2^{n+1/2}h^2$, уравнения (9),(10) на $\left(p^{n+1}+p^n\right)_{\bar{x}_1}$, $\left(p^{n+1}+p^n\right)_{\bar{x}_2}$ соответственно, просуммируем по точкам сетки. В результате получим тождества

$$\left\|v^{n+1/2}\right\|^2-\left\|v^n\right\|^2+\left\|v^{n+1/2}-v^n\right\|^2+\frac{2\tau}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\xi(x)}v^{n+1/2}\right\|^2+$$
$$+2\tau\mu\left\|v_x^{n+1/2}\right\|^2=2\tau\left(f,v^{n+1/2}\right)+2\tau\left(p^n,div_h v^{n+1/2}\right), \tag{13}$$

$$\tau\left(p^n,div_h v^{n+1/2}\right)+\tau^2\left(\left\|p_x^{n+1}\right\|^2-\left\|p_x^n\right\|^2\right)+\tau\left(div_h v^{n+1/2},p^{n+1}\right). \tag{14}$$

Теперь, если умножим уравнения (9), (10) на $\left(v^{n+1},v^{n+1/2}\right)h^2\tau$ и на $2\tau v^{n+1}h^2$, то получим соответственно тождества [6], [7]

$$\left\|v^{n+1}\right\|^2-\left\|v^{n+1/2}\right\|^2=\left(p^{n+1}-p^n,div\,v^{n+1/2}\right)\tau. \tag{15}$$

$$\left\|v^{n+1}\right\|^2-\left\|v^{n+1/2}\right\|^2+\left\|v^{n+1}-v^{n+1/2}\right\|^2=0. \tag{16}$$

Находя из (14) выражение $\tau\left(p^{n+1},div_h v^{n+1/2}\right)$ и подставляя его в (15), получаем

$$\left\|v^{n+1}\right\|^2-\left\|v^{n+1/2}\right\|^2+\tau^2\left(\left\|p_x^{n+1}\right\|^2-\left\|p_x^n\right\|^2\right)=-2\tau\left(p^n,div_h v^{n+1/2}\right). \qquad (17)$$

В силу (13), (16), (17) получим равенство

$$\begin{gathered}\left\|v^{n+1}\right\|^2-\left\|v^n\right\|^2+\left\|v^{n+1}-v^{n+1/2}\right\|^2+\left\|v^{n+1/2}-v^{n+1}\right\|^2+2\tau\mu\left\|v_x^{n+1/2}\right\|^2+ \\ +\tau^2\left(\left\|p_x^{n+1}\right\|^2-\left\|p_x^n\right\|^2\right)+\frac{2\tau}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\varepsilon(x)}v^{n+1/2}\right\|^2=2\tau\left(f,v^{n+1/2}\right).\end{gathered} \qquad (18)$$

Оценим правую часть полученного равенства, используя неравенство Шварца [8]:

$$\left|\left(f,v^{n+1/2}\right)\right|\le\|f\|_{-1}\left\|v_x^{n+1/2}\right\|\le\frac{\mu}{2}\left\|v_x^{n+1/2}\right\|^2-C_\mu\|f\|_{-1}^2, \text{ где } \|f\|_{-1}=\sup_{\left\|v_x^{n+1/2}\right\|=1}\left|\left(f,v^{n+1/2}\right)\right|$$

и v удовлетворяет условию (6). Тогда из (18) следует, что

$$\begin{gathered}\left\|v^{n+1}\right\|^2-\left\|v^n\right\|^2+\left\|v^{n+1}-v^{n+1/2}\right\|^2+\frac{2\tau}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\varepsilon(x)}v^{n+1/2}\right\|^2+ \\ +\tau\mu\left\|v_x^{n+1/2}\right\|^2+\tau^2\left(\left\|p_x^{n+1}\right\|^2-\left\|p_x^n\right\|^2\right)\le C\tau\,.\|f\|_{-1}^2.\end{gathered} \qquad (19)$$

Оцениваем в (7)-(.8) градиент p^n

$$\begin{gathered}\tau\left\|p_x^n\right\|\le\mu\tau\left\|\Delta_h v^{n+1/2}\right\|+\left\|v^{n+1/2}-v^n\right\|+\tau\|f\|\le \\ \le\left\|v^{n+1/2}-v^n\right\|+\frac{2\tau\mu}{h}\left\|v_x^{n+1/2}\right\|+\tau\|f\|+\frac{\tau}{\varepsilon}\left\|\xi(x)v^{n+1/2}\right\|.\end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\tau^2\left\|p_x^n\right\|^2\le 4\left(\left\|v^{n+1/2}-v^n\right\|^2+\frac{4\tau^2\mu^2}{h^2}\left\|v_x^{n+1/2}\right\|^2+\tau^2\|f\|^2\right)+ \\ +\frac{\tau^2}{\varepsilon^2}\left\|\xi(x)v^{n+1/2}\right\|^2,\end{gathered} \qquad (20)$$

Умножив (20) на β, $0<\beta<1$ и сложив с (19), будем иметь [9]

$$\|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2 + (1-4\beta)\|v^n - v^{n+1/2}\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon}(1-4\tau/\varepsilon) +$$

$$+\tau\left(\mu - \frac{16\tau\mu^2}{h^2}\beta\right)\|v_x^{n+1/2}\|^2 + \tau^2\|p_x^{n+1}\|^2 + \|\sqrt{\xi(x)}v^{n+1/2}\|^2 \le$$

$$\le \tau^2(1-\beta)\|p_x^n\|^2 + C_\mu\tau\,\|f\|_{-1}^2 + \tau^2\|f\|_4^2.$$

Полагая

$$0<\beta<\frac{1}{4},\ \ 1-\frac{4\tau}{\varepsilon}\beta>0,\ \ 1-\frac{16\tau\mu}{h^2}\beta>\beta_0>0$$

и учитывая неравенства Фридрихса и (11), имеем [10]

$$\|v^{n+1}\|^2 - \|v^n\|^2 + \tau\mu\beta_0 C_\Omega\left(\|v^{n+1/2}\|^2 + \|v^n - v^{n+1/2}\|^2\right) + \tau^2\|p_x^{n+1}\|^2 \le$$

$$\le \tau^2(1-\beta)\|\nabla_h p^n\|^2 + C_\mu\tau\,\|f\|_{-1}^2 + 4\tau^2\beta\|f\|^2.$$

Отсюда следует, что имеет место оценка

$$\|v^{n+1}\|^2 + \tau^2\|\nabla_h p^n\|^2 \le C\left(\|f\|_{-1}^2 + \tau\|f\|^2\right). \tag{21}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Решение итерационного метода (7)-(12) сходится к решению задачи (5), (6).

Доказательство. Обозначим

$$\omega^{n+1} = v^{n+1} - v,\ \ \omega^{n+1/2} = v^{n+1/2} - v,\ \ q^{n+1} = p^{n+1} - p.$$

Тогда для ω, q получаем уравнения

$$\frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\tau} = \mu\Delta_h\omega^{n+1/2} - \nabla_h q^n - \frac{\xi(x)}{\varepsilon}\omega^{n+1/2},$$

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}}{\tau} = \mu\Delta_h\left(q^{n+1} - q^n\right) \tag{22}$$

$$div_h\omega^{n+1} = 0,$$

при этом для $\omega^{n+1/2}$, ω^{n+1}, q^{n+1} сохраняются граничные условия (6). Решение этих уравнений удовлетворяет тождествам [11]:

$$\|\omega^{n+1}\|^2 - \|\omega^n\|^2 + \|\omega^n\|^2 + \|\omega^{n+1/2} - \omega^n\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\xi(x)}\,\omega^{n+1/2}\right\|^2 +$$
$$+ 2\tau\mu\|\omega_x^{n+1/2}\|^2 + \tau^2\left(\|q_x^{n+1}\|^2 - \|q_x^n\|^2\right) = 0, \tag{23}$$

$$\|\omega^{n+1}\|^2 + \|\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}\|^2 = \|\omega^{n+1/2}\|^2. \tag{24}$$

В силу первого уравнения (22) выводим

$$\tau\|q_x^n\| \le \left(\mu\tau\|\Delta_h\omega^{n+1/2}\| + \|\omega^{n+1/2} - \omega^n\|\right) + \frac{\tau}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\xi(x)}\,v^{n+1/2}\right\| \le$$
$$\le \|\omega^{n+1/2} - \omega^n\| + \frac{\tau}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\xi(x)}\,v^{n+1/2}\right\|.$$

Отсюда следует, что

$$\tau^2\|q_x^n\|^2 \le \frac{16\mu^2\tau^2}{h^2}\|\omega_x^{n+1/2}\|^2 + 3\|\omega^{n+1/2} - \omega^n\|^2 + \frac{3\tau}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\xi(x)}\,v^{n+1/2}\right\|^2. \tag{25}$$

Умножая (25) на β, суммируя с (23), затем полагая

$$1 - 16\tau\beta\frac{\mu}{h^2} > 0,\quad 1 - 4\tau\beta/\varepsilon > 0,\quad 1 - 2\beta > 0$$

и используя неравенство Фридрихса, имеем

$$(1 - \tau\mu C_0)\|\omega^{n+1}\|^2 + \tau^2\|q_x^{n+1}\|^2 \le (1 - \beta)\|q^{n+1}\|^2 + \|\omega^n\|^2.$$

В работе исследованы возможности применения различных формулировок исходных уравнений Навье-Стокса к моделированию нестационарных задач разного типа. Реализован итерационный метод неполной аппроксимации с групповой оптимизацей параметров для решения системы алгебраических уравнений, сходящийся независимо от свойств оператора системы. Метод показывает достаточную эффективность при решении разностных аналогов уравнений Пуассона для давления, векторного и сколярного потенциалов. Реализован также алгаритм, основанный на оптимизации по всем итерационным параметрам, одновременно с помощью которого можно получить точное решение системы за одну итерацию. Такой подход весьма экономичен при проведении тестовых серийных расчетов нестационарных задач.

Список литературы

1. Куттыкожаева Ш.Н. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса. Вестник КазГУ, сер. Мех-мат. Инф., 1998. №13. с. 54-59.
2. Ш.Смагулов, Н.М.Темирбеков, К.С.Камаубаев. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течения вязкой жидкости. // –Новосибирск. СО РАН. Сибирский журнал вычислительной математики. 2000. Т.3, №1. с.57-71.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. Наука. 1997. с.653.
4. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред.- М. Наука. 1984-520 с.
5. П.Н. Вабищевич. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. – М: МГУ. 1991. С.156.
6. D. Vola, L. Boscardin, J. C. Latche. Laminar unsteady flows of Bingham fluids: a numerical strategy and some benchmark results // Journal of Computational Physics, Vol. 187, Iss. 2, 2003, pp. 441-456.
7. P. Wesseling. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer Series in Computational Mathematics, Berlin: Springer, Vol.29, 2001.
8. Computational Mathematics, Vol.26, No3, 2008, pp.437-455.
9. S.J. Zhong D.A. Yuen, L.N. Moresi. Numerical Methods for Mantle Convection // Treaties on Geophysics, Vol.7, 2007, pp.227-252.
10. X. Xie, J. Xu, G Xue. Uniformly–stable finite element methods for Darcy–Stokes–Brinkman models // Journal of Computational Mathematics, Vol. 26, No 3, 2008, pp. 437–455.
11. M.A. Olshanskii, A.Reusken. Analysis of a Stokes interface problem // Numerische Mathematik, Vol. 103, Iss. 1, 2006, pp. 129-149.

Түйін

Жылдамдық векторының алшақтық деңгейінің квадратының функционалдық барынша азайту негізінде Стокс есептерін шешу әдістері ұсынылған. Бұл мақсатта итерациялық әдісі қолданылады. Функционал қасиеттері зерттеледі. Стокс есептерін шешуде жуықтау тізбегінің жинақтылығы дәлелденді. Есептеу және ақпараттық технологиялар мәселелерін дамуына байланысты Стокс теңдеуін сандық шешімі математиктер мен

механиктердің назарын өзіне аударып отыр. Сондықтан тиімді есептеу алгоритмдері мен математикалық негіздеу Стокс теңдеулері шешімдерінің әдістері есептегіш математиканың өзекті міндеті болып табылады. Осы зерттеу тақырыбының өзектілігін Навье - Стокс міндеттерінің сандық модельдеу мәселелері бойынша бүкіл әлемде түрлі авторлардың көптеген жарияланымдары растайды.

Summary

The method of Stokes problems, based on the minimization of functional, which is the square of the norm of divergence of velocity vector. The iterative method was used in order to do it. The property of the approximation sequence to the Stokes problem solution was proved. In connection with the development of computing and information technology issues of the numerical solution of Stokes equations are attracting much attention of mathematicians and mechanics. Therefore, the development of efficient computational algorithms and mathematical foundation of methods for solving Stokes equations are the actual problem of computational mathematics. The relevance of the topic of research is also confirmed by numerous publications of different authors around the world on numerical simulation of problems Navier - Stokes.