

КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ОДНИМ ДЕМПФЕРНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ В НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Мамырбаева И.К.

Аннотация

В статье рассмотрена постановка задачи и получены уравнения колебаний струны с одним демпферным закреплением, с катушкой в замыкающем контуре, в нестационарном магнитном поле. Для частного случая периодического изменения магнитного поля получена система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Получено условие отсутствия электромагнитного демпфирования изолированных колебаний струны. Оценено влияние магнитного поля на частоты колебаний.

Ключевые слова: линейные колебания, струна, двухволновой процесс, индуктивность, электромагнитное демпфирование, изолированная частота.

Изучение электромагнитного воздействия на колебания электропроводных континуальных систем [1-8] является одним из актуальных направлений современной теории колебаний. Также значительный интерес представляют задачи о колебаниях электромеханических систем с распределенными параметрами [9-11] при неклассических граничных условиях, поскольку в таких задачах присутствуют два фактора, вызывающих двухволновые процессы. В [12] содержится теория электромагнитного воздействия на колебания континуальных систем: струны, стержня, пластинки, ограниченной и неограниченной жидкости. Авторами разработаны методы расчета частот, факторов затухания и амплитудных форм,

характеризующих колебания этих систем в различных случаях.

В данной задаче рассмотрены линейные колебания электропроводящей струны во внешнем нестационарном магнитном поле при наличии в замыкающем контуре катушки.

Пусть закрепленные концы струны замкнуты идеальной электрической цепью, содержащей катушку индуктивностью L . Образованный при этом электрический контур для простоты будем считать прямоугольным с размерами, указанными на рисунке 1.

Считается, что индуктивное сопротивление ωL значительно превосходит омическое R . За счет изменения магнитного потока, лежащего в плоскости Oxz , на концах катушки создается напряжение [12]:

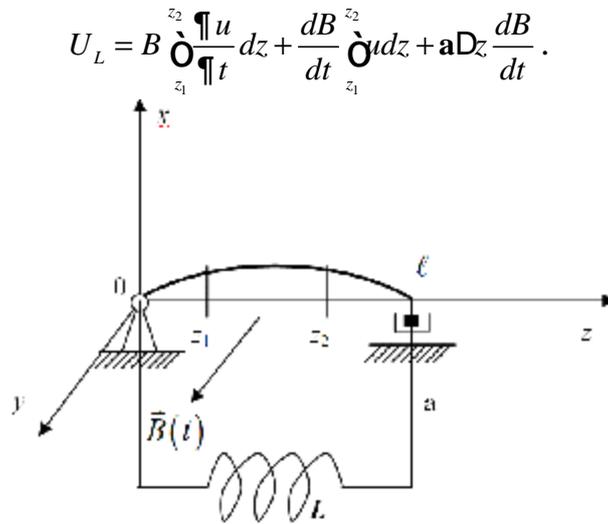


Рисунок 1 - Схема расположения струны с катушкой в замыкающем контуре, с демпферным закреплением, в магнитном поле

В случае контура, лежащего в плоскости Oyz , последний член в этом выражении отсутствует.

С другой стороны
$$U_L = L \frac{dI}{dt}.$$

Тогда после интегрирования и преобразований получим

$$I = \frac{1}{L} \int_{z_1}^{z_2} B \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{dB}{dt} \int_{z_1}^{z_2} u dz + a D_z \frac{dB}{dt} = \frac{1}{L} \int_{z_1}^{z_2} B u dz + B a D_z \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Причем здесь $L \neq 0$ в силу условия $\omega L \gg R$.

При взаимодействии этих токов с внешним магнитным полем [13-15] возникает электромагнитная сила, действующая на активном участке:

$$dF_{\text{ЭМ}} = BI \times dz = \frac{B}{L} \int_{z_1}^{z_2} u dz + B a D_z \frac{\partial u}{\partial t} dz.$$

Учтем также силу внешнего механического сопротивления [16], действующую по всей длине струны, и запишем дифференциальное уравнение движений в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_c \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{m_0} \frac{B}{L} \int_{z_1}^{z_2} u dz + B a D_z \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Запишем граничные условия: левый конец закреплен жестко: $U(0, t) = 0$.

Граничное условие на правом конце [17], т.е. на демпфере запишем с учетом массы его подвижных частей m на основании принципа Даламбера:

$$\frac{\partial T_0}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} + m \frac{\partial U}{\partial t} + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{z=l} = 0,$$

где T_0 - натяжение струны, которая считается неизменной,
 m - коэффициент вязкости демпфера.

К уравнению (1) применим метод Фурье, представив динамическую функцию смещений в виде бесконечного ряда по собственным комплексным амплитудным функциям Φ_n :

$$U(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \Phi_n(z), \quad (2)$$

где $q_n(t)$ - обобщенная координата.

После подстановки (2) в дифференциальное уравнение получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \Phi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \Phi_n - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n \Phi_n + \frac{1}{m_0} \frac{B^2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \int_{z_1}^{z_2} \Phi_n dz + a D_z \Big|_{z=l} = 0, \quad (3)$$

где $a = \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}$ - скорость распространения волны без учета всех видов диссипации.

Для струны с безинерционным демпферным закреплением на одном из концов в отсутствии магнитного поля и внешней диссипации собственные амплитудные функции согласно [18-20] представляются в виде:

$$\Phi_n(z) = X_n^{(1)}(z) - i X_n^{(2)}(z) = \sin(a_n z) \times \text{ch}(bz) + i \times \cos(a_n z) \times \text{sh}(bz) = \sin(l_n z),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

где $l_n = a_n + ib$.

Можно использовать и форму, комплексно-сопряженную с предыдущей:

$$\overline{\Phi}_n(z) = \sin(a_n z) \times \text{ch}(b \times z) - i \times \cos(a_n z) \times \text{sh}(b \times z) = \sin(\overline{l}_n z),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

где $\overline{l}_n = a_n - ib$.

Используем для решения задачи эти функции, хотя, строго говоря, они не точно соответствуют ей. Вопрос о влиянии электромагнитного поля на собственные амплитудные функции рассматривается отдельно.

Заметим, что

$$\frac{d^2 \Phi_n}{dz^2} = -\Gamma_n^2 \times \Phi_n(z) \text{ и } \frac{d^2 \bar{\Phi}_n}{dz^2} = -\bar{\Gamma}_n^2 \times \bar{\Phi}_n(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда дифференциальное уравнение (3) имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{\Gamma_n} \sin(\Gamma_n z) + \frac{b_n}{\Gamma_n} \cos(\Gamma_n z) + p_n^2 q_n \sin(\Gamma_n z) \right] + \frac{1}{m_0} \frac{B^2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \int_{z_1}^{z_2} \sin(\Gamma_n z) dz + a D z^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (5)$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{\bar{\Gamma}_n} \sin(\bar{\Gamma}_n z) + \frac{b_n}{\bar{\Gamma}_n} \cos(\bar{\Gamma}_n z) + p_n^2 q_n \sin(\bar{\Gamma}_n z) \right] + \frac{1}{m_0} \frac{B^2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \int_{z_1}^{z_2} \sin(\bar{\Gamma}_n z) dz + a D z^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (6)$$

где $p_n^2 = \Gamma_n^2 \times a^2 = (a_n + ib)^2 a^2$; $\bar{p}_n^2 = \bar{\Gamma}_n^2 \times a^2 = (a_n - ib)^2 a^2$ - комплексно-сопряженные собственные частоты, полученные для случая колебаний струны с демпферным закреплением без учета магнитного поля.

В интеграле

$$\int_{z_1}^{z_2} \sin(\Gamma_n z) dz = \int_{z_1}^{z_2} [\sin(a_n z) \times \text{ch}(b \times z) + i \times \cos(a_n z) \times \text{sh}(b \times z)] dz, \quad (7)$$

обозначим

$$g_n^{(1)} = \int_{z_1}^{z_2} \sin(a_n z) \times \text{ch}(b \times z) \times dz, \quad (8)$$

также

$$g_n^{(2)} = \int_{z_1}^{z_2} \cos(a_n z) \times \text{sh}(b \times z) \times dz. \quad (9)$$

Умножим (5) на функцию: $f_r(z) = \frac{\sin(a_r z)}{\text{ch}(bz)}$

и проинтегрируем в пределах длины струны.

$$c_{nr} = \int_0^l \cos(a_n z) \times \sin(a_r z) \times \text{th}(bz) dz$$

согласно (6-8) имеем

$$\int_0^1 \Phi_n(z) \times f_r(z) dz = \begin{cases} 1 + i \times c_{nr}; n \text{ при } n = r \\ i \times c_{nr}; n \text{ при } n \neq r \end{cases}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

Дифференциальное уравнение (5) имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{r-1} \dot{a}_n \dot{e}_n \times c_{nr} (\alpha_n + b_c \alpha_n + p_n^2 q_n) \dot{u} + [1 + i \times c_{rr}] \times \dot{e}_r \times (\alpha_r + b_c \alpha_r + p_r^2 q_r) \dot{u} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{e}_n \times c_{nr} (\alpha_n + b_c \alpha_n + p_n^2 q_n) \dot{u} + \frac{1}{m_0} \frac{B^2}{L} \times \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(a_r z)}{\text{ch}(b z)} dz \times \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{e}_n (g_n^{(1)} + i g_n^{(2)}) \times q_n \dot{u} + \frac{1}{m_0} \frac{B^2}{L} \times \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(a_r z)}{\text{ch}(b z)} dz = 0,$$

$$r = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

А теперь умножим дифференциальное уравнение (6), представив $\Phi_n(z)$ в виде (4), на функцию $f_r(z)$ и проинтегрируем в пределах длины струны.

С учетом обозначений (8 – 9) имеем

$$\int_0^1 \bar{\Phi}_n(z) \times f_r(z) dz = \begin{cases} 1 - i \times c_{nr}; n \text{ при } n = r \\ -i \times c_{nr}; n \text{ при } n \neq r \end{cases}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{r-1} \dot{a}_n \dot{e}_n \times i \times c_{nr} (\alpha_n + b_c \alpha_n + \bar{p}_n^2 q_n) \dot{u} + [1 - i \times c_{rr}] \times \dot{e}_r \times (\alpha_r + b_c \alpha_r + \bar{p}_r^2 q_r) \dot{u} + \sum_{n=r+1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{e}_n \times i \times c_{nr} (\alpha_n + b_c \alpha_n + \bar{p}_n^2 q_n) \dot{u} + \frac{1}{m_0} \frac{B^2}{L} \times \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(a_r z)}{\text{ch}(b z)} dz \times \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{e}_n (g_n^{(1)} - i g_n^{(2)}) \times q_n \dot{u} + \frac{1}{m_0} \frac{B^2}{L} \times \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(a_r z)}{\text{ch}(b z)} dz = 0,$$

$$r = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Сложив уравнение (10) с уравнением (11) и поделив на $2l$, получим:

$$\alpha_r + b_c \alpha_r + \text{Re}(p_r^2) \times q_r + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{e}_n \times \text{Im}(p_n^2) \times q_n \dot{u} + \frac{1}{m_0 l} \frac{B^2}{L} \times \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(a_r z)}{\text{ch}(b z)} dz \times \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{e}_n (g_n^{(1)}) \times q_n \dot{u} + \int_{z_1}^{z_2} \ddot{u} dz = 0,$$

$$r = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

где

$$d_r = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(a_r z) \ddot{\varphi}}{\operatorname{ch}(bz)} dz. \quad (13)$$

Отличительной особенностью дифференциального уравнения (12) является то, что оно содержит только действительные параметры. А наличие суммы при обобщенной координате указывает на частотную зависимость демпфирующих факторов.

Сумма, содержащая обобщенные координаты, отражает электромагнитное воздействие на струну.

Если выполняется условие:

$$d_r = 0, \quad (14)$$

то электромагнитного демпфирования r -той формы не будет, т.е. данная форма будет изолированной.

Рассмотрим случай периодического изменения магнитной индукции по закону:

$$B = B_0 \cos \omega t; \quad (15)$$

$$\ddot{\varphi} + b_c \dot{\varphi} + \operatorname{Re}(p_r^2) \varphi_r + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{c}_{nr} \operatorname{Im}(p_n^2) \varphi_n \dot{\varphi} + \frac{B_0^2}{m_0 l L} \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{c}_{nr} \varphi_n \dot{\varphi} + a D_z \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} = 0. \quad (16)$$

Обезразмерим уравнение (16), приняв в качестве характерных масштабов длины $\tilde{l} = l$, магнитной индукции $\tilde{B} = \frac{B}{B_0}$, индуктивности $\tilde{L} = L$,

времени $\tilde{t} = t \frac{p \gg a}{l}$, а также: $\tilde{g}_n^{(1)} = \frac{g_n^{(1)}}{l}$, $\tilde{d}_n = \frac{d_n}{l}$. Тогда число Стюарта, характеризующее отношение магнитной силы к силе инерции выражается как:

$$St = \frac{B_0^2 l}{\rho a m_0 L}; \quad (17)$$

$$c_{nr}^* = c_{nr} \operatorname{Im}(p_n^2), \quad r = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\ddot{\varphi} + b_c \dot{\varphi} + \operatorname{Re}(p_r^2) \varphi_r + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{c}_{nr}^* \varphi_n \dot{\varphi} = St \cos^2 \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \dot{c}_{nr} \varphi_n \dot{\varphi} + a D_z \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \quad (18)$$

($r = 1, 2, \dots$).

Если $\mathbf{B} = \text{const}$, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + b_c \dot{q}_r + \text{Re}(p_r^2) q_r + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_{nr}^* q_n \dot{q}_r = St \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_{nr}^{(1)} q_n \dot{q}_r \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Выбор приближения данного уравнения зависит от числа Стюарта и требуемой точности расчетов.

Таким образом, применяя реактивный электрический элемент в виде катушки индуктивности, можно расширить управляющие возможности электромагнитного воздействия на колебания проводящей струны, избирательным образом изменяя ее механические свойства. При постоянном магнитном поле индуктивность увеличивает натяжение струны. В нестационарном магнитном поле катушка создает параметрическое и силовое воздействие на струну. При этом имеется возможность существенно воздействовать указанным образом на несколько низкочастотных колебаний за исключением изолированных.

Получены дифференциальные уравнения колебания струны с одним демпферным закреплением с учетом влияния электромеханических сил нестационарного магнитного поля при наличии катушки индуктивности в замыкающем контуре.

Получены условия выделения изолированных от электромагнитного демпфирования и возбуждения парциальных колебаний струны с одним демпферным закреплением в нестационарном магнитном поле.

Из приближенного уравнения (19), в случае постоянства магнитного поля, следует что следует возрастание квазиупругих коэффициентов, а соответствующие демпфированные частоты уменьшаются.

Список литературы

- 1 Preumont A. Vibration control of active structures: an introduction. – Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo: Springer, 2011. – 480 p.
- 2 Mohamed et al. Intelligent hybrid Active Force Control in identification of a nonlinear MIMO system/T.L.T.// Research and Development (SCORED): IEEE Student Conference on Research and Development. – Pulau Pinang, Malaysia, 2012. – P. 114–119.
- 3 Bayzakova G. A., Tomilin A. K. Electromagnetic Method for Resonance Tuning of a Mechatronic System, // Applied Mechanics and Materials : Scientific Journal. — 2015. — Vol. 770 : Urgent Problems of Up-to-Date Mechanical Engineering. — [P. 572-578].
- 4 Lu Xiaobo, Tao Yungang, He Yanwei. Active vibration control of a cantilever beam using piezoelectric sensors and actuators // Trans. Nanjing Univ. Aeron. and Astron. – 1997. – V. 14. – № 3. – P. 67–72.

- 5 Mizuno T., Araki K. Active Dynamic Vibration Absorber with Automatic Frequency Tracking Performance // JSME International Journal Series C. – 1998. – V. 41. – № 3. – P. 378–383.
- 6 Lyshevski S.E. Precision control of mechatronic systems with electromagnetically steered moving masses // Int. J. Advanced Mechatronic Systems. – 2013. – V. 5. – № 5. – P. 1–9.
- 7 Study on Application of Two New Types of Piezoelectric Actuators to the Vibration Control / W. Wang et al. // Piezoelectric & Acousto Optics. – 2010. – V. 1. – 223 p.
- 8 Y. Wang et al. Frequency domain identification for active vibration control of flexible structures / Control and Automation 2005. ICCA'05: International Conference on IEEE. – Budapest, 2005. – V. 2. – pp. 1149–1153. Горошко О.О., Демьяненко А.Г., Киба С.П. Двохвильові процеси в механічних системах – Киев, “Либідь”, 1991.
- 9 Tomilin A. K. Two-Wave Processes in the Magnetic Vibrations of a String [Electronic resource] // Applied Mechanics and Materials : Scientific Journal. — 2015. — Vol. 756 : Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (MEACS2014). — [P. 476-481].
- 10 Tomilin A.K., Prokopenko E.V. NonDestructive Testing of Rods Using a Potential Component of a Magnetic Field // World Journal of Mechanics. – 2014. – V. 4. – № 2. – P. 37–43.
- 11 Prokopenko E. V., Tomilin A. K. Effect of the inductive parameter of mechatronic system on elastic element longitudinal vibrations [Electronic resources] // Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (MEACS) : proceedings of the International Conference, Tomsk, 16-18 October, 2014
- 12 Томилин А. К. Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами: монография. Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева. — Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2004. — 727с.
- 13 Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
- 14 Сермонс Динамика твердых тел в электромагнитном поле. – М.: Наука, 1982.
- 15 Матвеев А.Н. Электродинамика и СТО. - М.: Высшая школа, 1984.
- 16 Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972.
- 17 Горошко О.О., Демьяненко А.Г., Киба С.П. Двохвильові процеси в механічних системах – Киев, “Либідь”, 1991.
- 18 Мамырбаева И.К. Колебания одномерных континуальных систем с неклассическими граничными условиями // Материалы международной научной конференции «Первые Ержановские чтения». Том 2 – Павлодар, 2004. С.128 – 134.
- 19 Мамырбаева И.К. Исследования колебаний струны с неклассическими граничными условиями при учете внешнего сопротивления // Вестник

КазНУ. Сер. матем., механика, информат. – Алматы.-2004, №2 (41) – С. 127 - 132.

- 20 Мамырбаева И.К., Нугуманов А.М. Колебания струны с конденсатором в нестационарном магнитном поле. Материалы международной IV научной конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения» - Алматы, 2014, С. 135-142.

Түйін

Мақалада тұйықтаушы контурында шарғысы бар бір ұшы демпферлі бекітілген ішектің стационар емес магнит өрісіндегі тербелістері жайлы есеп қойылып, тербеліс теңдеулері құрылған. Бір ұшы өзі демпферлік бекітілген абсолют иілімді ішектің тербелістері екі толқынды сипатталады. Магниттік өріс периодты өзгерген жағдайда коэффициенттері тұрақты болатын қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі табылып, қорытындылар жасалған. Магнит индукция векторы тербеліс жазықтығына перпендикуляр болатын стационар емес магнит өрісінің әсерінен бір ұшы инерциялы емес демпфермен бекітілген ішектің жекеленген парциал тербелістерінің электромагниттік қозуы немесе өшуі болмау шарттары алынған. Квазисерпімді коэффициенттердің демпфирленген жиіліктерге әсері анықталған.

Summary

The problem setting was considered in this article and the oscillations' equations of a string with damped fastening at one of the ends with coil at closed circuit have been obtained in a dynamic magnetic field. Also oscillations of an absolutely flexible string with damped fastening at one of the ends have two-wave character. For special case of periodic variation of magnetic field the systems of ordinary differential expressions with constant coefficients have been obtained. The conclusions have been made. Conditions of allocation isolated from the electromagnetic damping and excitation the partial oscillations of absolutely flexible conducting string with one damped fastening in a non-stationary magnetic field are received. The effect of quasi elastic coefficients on damped frequencies is determined.