С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым Жаршысы// Вестник Науки** Казахского агротехнического университета имени С. Сейфуллина. - 2016. – **№ 2(89)**. - С.125-130

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СЛОЖНОЙ ОБЛАСТИ

Е.А. Акжигитов, А.Б. Аруова,
М.Ш. Тилепиев, П.Б. Бейсебай

Аннотация

В статье рассматривается приближенное решение линейных краевых задач второго порядка с переменными коэффициентами в нестандартных областях. В работе найдено условие, улучшающее скорость сходимости полученного приближенного решения к точному решению исходной задачи. При использовании теоремы вложения и теоремы о продолжении [5] решение краевых задач сводится к минимизации функционала. Предложенная методика решения способствует развитию применения вариационных методов в вычислительной математике.

Ключевые слова: краевая задача, функционал, вариационный метод,линейность.

В нестандартных областях при приближенном решении краевых задач часто используется метод фиктивных областей. Воспользуемся результатами работы [3].

Рассмотрим непрерывную модель на простейшей задаче.Пусть*Ω*-ограниченная область с гладкой границей *∂Ω*.

Рассмотрим задачу:

$$Lu = -\Delta u + u + q(x)u = f(x); \qquad (1)$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь *q(x)* - достаточно гладкая функция, *∂Ω* - граница области*Ω,*где $\Omega \subset R^2$, $x = (x_1, x_2)$.Будем предполагать, что данная задача однозначно разрешима в $L_2(\Omega)$. Оператор, соответствующий задаче (1), обозначим через *L.*

Пусть *Q*- некоторая область типа квадрата или круга изR^2, содержащая *Ω,* где задача:

$$Au = -\Delta u + u = v, \qquad (2)$$

с некоторыми краевыми условиями разрешима, при этом функция Грина выписывается явным образом.

Решение задачи (1) будем искать в виде:

$$U = A^{-1}v.$$

Тогда вместо (1) получим:

$$v + q(x)A^{-1}v - f = 0;$$

$$A^{-1}v\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1')$$

Продолжим $q(x)$ и $f(x)$ на Q периодическими функциями:

$$v + q(x)A^{-1}v = Mv.$$

и перепишем (1') следующим образом:

$$Mv - f = 0, \text{ в } Q,$$
$$A^{-1}v\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (3)$$

Введем функционал:

$$J(v) = \left\|\chi(Mv - f)\right\|^2 + \int_{\partial\Omega}\left|A^{-1}v\right|^2 ds,$$

где ds- элемент поверхности $\partial\Omega$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega \\ 0, x \in Q/\Omega \end{cases}$

На решении (3) функционал обращается в ноль. Преобразуем криволинейный интеграл:

$$\int_{\partial\Omega}\left|A^{-1}v\right|^2 ds = \int_{\partial\Omega}\left(\int_Q G(x,\eta)v(\eta)d\eta \int_Q G(x,y)v(y)dy\right)ds(x) =$$

$$= \int_Q\int_Q\left[\int_{\partial\Omega} G(x,\eta)(G(x,y)ds(x)\right]v(\eta)v(y)dyd\eta = \left\langle M_1 v, v\right\rangle.$$

$G(x,y)$ -функция Грина задачи (3) с периодическими краевыми условиями, оператор M_1- интегральный, неотрицательный и самосопряженный оператор.

Теперь функционал $J(v)$ можно записать в виде:

$$J(v) = \left\|\chi(Mv - f)\right\|^2_{L_2(Q)} + \left\langle M_1 v, v\right\rangle_{L_2(Q)}. \qquad (4)$$

Считая, что v зависит от параметра t, продифференцируем J по t:

$$J_t(v) = 2\cdot\langle M^*\chi(Mv - f), v_t\rangle_{L_2(Q)} + 2\langle M_1 v, v\rangle.$$

Возьмем v из уравнения:

$$v_t = -2[M^*\chi(Mv - f) + M_1 v]; \qquad (5)$$

$$v|_{t=0} = v_0.$$

Тогда имеем:

$$J_t(v) = -\|v(t)\|^2 = -4\|M^*\chi(Mv - f) + M_1 v\|^2. \qquad (6)$$

Для того чтобы оценить *J(v)* и *v* мы будем оценивать снизу v_t.
Пусть g является решением задачи в Ω:

$$Mg = Mv - f;$$
$$A^{-1}g|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (7)$$

и решение этой задачи существует.

Действительно, обозначим $A^{-1}g = u$. Тогда получим уравнение:

$$-\Delta u + u + q(x)u = -Mv - f,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Уравнение имеет решение *u*, которое допускает продолжение $|u \in D(A)$, для которого:

$$\|Au\|_{L2(Q)} \le c\|M\nu - f\|_{L2(\Omega)}. \qquad (8)$$

Это хорошо известный факт для задачи Дирихле, который приведен в [2]. Отсюда для g вытекает оценка:

$$\|g\|_{L2(Q)} \le c\|M\nu - f\|_{L2(\Omega)}. \qquad (9)$$

Умножим (5) скалярно на g:

$$\langle v_t, g\rangle = -2\langle M^*\chi(Mv - f) + M_1 v, g\rangle = -2\langle\langle M^*\chi(Mv - f), Mg\rangle - 2\langle M_1 v, g\rangle.$$

В силу граничного условия$A^{-1}g=0$ на $\partial\Omega$ член $2(M_1v,g)=-2(v,M_1g)$ (т.к. M_1 - самосопряженный оператор) обращается в ноль, а первый членвозможно вычислить в силу уравнения (7). Тогда с учетом (8) и, используя неравенство Коши, получим:

$$2\|\chi(Mv-f)\|^2=-2\langle v_t,g\rangle,$$
$$\langle vt,g\rangle\le\|v_t\|\|g\|_{L2(\Omega)}\le c\|v_t\|\|\chi(Mv-f)\|_{L2(\Omega)}.$$

Поэтому:

$$\|\chi(Mv-f)\|\le c\|v_t\|. \qquad (10)$$

Умножим (7) скалярно на v:

$$(\|v\|^2/2)=-2\langle M^*\chi(Mv-f),v\rangle-2\langle M_1v,v\rangle=-2\varphi-2\langle\chi(Mv-f),f\rangle.$$

Интегрируя неравенство по tи, используя неравенство Коши, получим:

$$(\|v\|^2/2)(t)+2\int_0^t J(v)dt=-2\int_0^t\langle\chi(Mv-f),f\rangle dt+(\|v\|^2/2)(o)\le.$$
$$\le 2\Big(\int_0^t\|\chi(Mv-f)\|^2dt\Big)^{1/2}\|f\|\sqrt{t}+(\|v\|^2/2)(o).$$

Из последнего неравенства и из (9) следует, что:

$$\|v\|^2/2+2\int_0^t J(v)dt=\le c_1\sqrt{t}+c_2. \qquad (11)$$

Из (11) вытекает, что:

$$J(v)\le c_3\frac{1}{\sqrt{t+1}},t\ge 0. \qquad (12)$$

Действительно, если (12) не выполнено, то для любого N=1, 2, 3... найдется t_Nтакое, что:

$$J(v)(t_N)\le N\frac{1}{\sqrt{t_N+1}},t_N\to\infty.$$

Так какJ по tмонотонно не возрастает, из (11) следует:

$$c_1\sqrt{t_N}+c_2 \ge \int_0^{t_N} J(v)(t)dt \ge N\frac{1}{\sqrt{t_N}}\int_0^{t_N} dt = N\sqrt{t_N}.$$

Это неравенство противоречиво, так как N, $\sqrt{t_N} \to \infty$. Поэтому (12) доказано.

Из (12) для решения u исходной задачи (1) имеем:

$$\left\| -\Delta u^{(t)} + q(x)u^{(t)} - f \right\|^2_{L2(Q)} + \int_{\partial\Omega} \left| u^{(t)}(x) \right|^2 ds(x) \le c_3(\sqrt{t}+1)^{-1}, \qquad (13)$$

здесь $u^{(t)}=A^{-1}v(t)$, где $v(t)$ - решение (5). Из (13) следует:

$$-\Delta(u-u^{(t)}) + q(x)(u-u^{(t)}) = g^{(t)}; \qquad (14)$$

$$(u-u^{(t)})\big|_{\partial\Omega} = r^{(t)}.$$

Решение (1),$g^{(t)}$, $r^{(t)}$удовлетворяют неравенству:

$$\left\| g^{(t)} \right\|^2_{L2(Q)} + \int_{\partial\Omega} \left| r^{(t)} \right|^2 ds(x) \le c_3(\sqrt{t}+1)^{-1}.$$

Для решения u-$u^{(t)}$задачи (14) справедлива оценка:

$$\left\| u-u^{(t)} \right\|_{W^{1/2}{}_2 L2(Q)} \le c\left[\left\| g^{(t)} \right\|\right]_{L2(Q)} + \sqrt{\int_{\partial\Omega} \left| r^{(t)} \right|^2 ds(x)}. \qquad (15)$$

Последнее неравенство следует из точных теорем для граничных эллиптических задач([2]).

Поэтому (15) и оценка для $g^{(t)}$и $r^{(t)}$приводит к неравенству:

$$\left\| u-u^{(t)} \right\|_{W^{1/2}{}_2(\Omega)} \le c_4 \frac{1}{\sqrt{t}+1}. \qquad (16)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть задача (1) однозначно разрешима в пространстве $L_2(\Omega)$ и выполняется теорема о продолжении решений с сохранением классагладкости, тогда функция $u^{(t)} = A^{-1}\eta, \nu(t)$ при $t\to\infty$ сходится к решению задачи (1) и выполняется оценка:

$$\left\|u - u^{(t)}\right\|^2_{W_2^{1/2}} \le c_4 \frac{1}{\sqrt{t}+1},$$

где $v(t)$ -решение уравнения:

$$v_t = -2[M^* \chi(Mv - f) + M_1 v].$$

Замечание. Вместо задачи Дирихле (1) предложенным методом будем строить приближенное решение задачи Неймана:

$$-\Delta u + q(x)u = f(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial m}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial m}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ - производная по направлению нормали. Тогда мы достигнем более хорошей оценки, а именно вместо (16) получим:

$$\left\|u - u^{(t)}\right\|^2_{W_2^{3/2}(\Omega)} \le c_4 \frac{1}{\sqrt{t}+1}.$$

Данный вывод связан с использованием точных теорем для эллиптическихзадач, которые в данном случае вместо (16) дают оценку

$$\left\|u - u^{(t)}\right\|^2_{W_2^{3/2}(\Omega)} \le c\left(\left\|g^{(t)}\right\|_{L_{2(\Omega)}} + \sqrt{\int_{\partial\Omega}\left|r^{(t)}\right|^2 ds(x)}\right)$$

Список литературы

1. Жумагулов Б.Т.,АруоваА.Б. О приближенном методе решения линейных краевых задач в нестандартных областях. //Материалы 3-ей традиционнойказахстанско-российской научно-практической конференции,2000, с. 98-101.
2. Кузнецов Ю.А. Вычислительные методы в подпространствах. В кн.: Вычислительные процессы и системы. М., 1984, вып. 2.
3. Мухамбетжанов А. Т., Отелбаев М. О., Смагулов Ш. С. Об одном методе фиктивной области для нелинейных краевых задач. //Вычислительные технологии. Новосибирск, т.3, № 4, 1998.
4. Отелбаев М.О., Аруова А.Б., Кожахметов С.Т. Линейная задача в области.

//Тезисы международной научно-технической конференции. Актау, 1996, с.115-117.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: "Наука", 1988.
6. E. Babolian, A. R. Vahidi, A. Shoja. An efficient method for nonlinear fractional differential equations: combination of the Adomian decomposition method and spectral method. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014, Volume 45, Issue 6, pp 1017-1028
7. Lang P., Locker J. Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by $-D^2$ // J. Math. Anal. andAppl. 1990. V. 146, № 1, pp. 148 – 191.
8. I. Jin, Peter Markovich and ChristofSparber. Mathematical and computational methods for semiclassical Schrödinger equations. // ActaNumerica, 2011, Volume 20,pp. 121-209.
9. Fajun Yu. From the solutions to construct the Schrödinger-like equation with source term and its numerical simulations. // NonlinearDynamics. 2015, Volume 82, Issue 1,pp. 249-257.
10. MikhailKorobkov, Konstantin Pileckas, Remigio Russo.Solution of Leray’s problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains. // Annals of mathematics.Volume 181 (2015), Issue 2,pp. 769-807.

Түйін

Бұл мақалада стандартты емес аймақта екінші ретті айнымалы коэффициентті сызықты шекаралық есептің жуық шешімі қарастырылады. Берілген есептің жуық шешімінің тура шешімге жинақталу жылдамдығын жақсартатын шарт табылды. Шекаралық есептерді енгізу және шешімді жалғастыру теоремаларын пайдаланып функционал минимумға келтіріледі. Ұсынылып отырған есепті шешу әдісі есептеу математикасында жаңа вариациялық әдісті пайдалануды әрі қарай жетілдіруге мүмкіндік жасайды.

Summary

In the article an approximate solution of linear boundary value problems of second order with variable coefficients in nonstandard region is considered. A condition which improves the rate of convergence approximate solution to the exact solution of the original problem is obtained. Boundary value problem is reduced to minimization of the functional by using the embedding theorem and the theorem on the continuation of the solution. The proposed methodology of solution contributes to the further development of the applications of the new variation method to computational mathematics.