С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым жаршысы (пәнаралық) = Вестник науки** Казахского агротехнического университета им. С.Сейфуллина (**междисциплинарный**). - 2017. - №4 (95). - С.108-115

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФАХ

Мурзабекова Г.Е., Тәжібай Л.К.

Аннотация

Статья посвящена решению задач управления и идентификации для систем, описываемых уравнениями в частных производных на графах. Целью исследования является восстановление потенциалов источников идентификации для параболического уравнения на графах.

В основу положен метод граничного управления (Boundary Control Method), который был предложен в конце 80-х годов XX века Санкт-Петербургскими математиками. Метод основан на связи между обратными задачами (идентификацией) и управляемостью динамических систем. Особую роль играет рекурсивный метод (Leaf Peeling Method), разработанный С.А. Авдониным. Используются также методы теории дифференциальных уравнений, теории управления, теории тригонометрических рядов Фурье, спектральной теории дифференциальных операторов, в том числе операторов на метрических графах.

Предложен метод решения задач управления и обратных задач для дифференциальных уравнений на произвольных графах. В ходе исследования получены следующие результаты: развит новый подход к решению задач управления и обратных задач для дифференциальных уравнений с памятью на графах; получены новые результаты по управляемости и идентификации потенциалов и источников для дифференциальных уравнений на графах; разработаны алгоритмы решения задач управления и обратных задач для дифференциальных уравнений с памятью на отрезке, звездном графе и деревьях.

Применимость результатов данного исследования высока как в теоретическом плане – развитие исследований в теории дифференциальных уравнений с памятью на графах, так и в плане приложений к биологическим процессам, в частности нейробиологии, нанотехнологиях, в химической и нефтяной промышленности.

Ключевые слова: тепловое уравнение на графах, идентификация источника, граничное управление, обратные задачи, метрические графы.

В последнее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире благодаря появлению новых приложений [2, 4, 6-10].

Пусть $\Omega = E \cup V$ конечный связный компактный метрический граф-дерево, где $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ множество ребер и $V = \{v_1, \dots, v_{N+1}\}$ набор вершин. Граф называется *метрическим графом*, если каждое ребро $e_j \in E$ отождествляется с интервалом (a_{2j-1}, a_{2j}) вещественной прямой положительной длины $l = |a_{2j-1} - a_{2j}|$. Такой граф называется *деревом*, если он не имеет циклов. Ребра соединяются вершинами v_j, которые можно рассматривать в качестве классов эквивалентности конечных точек $\{a_j\}$. Подграф графа Ω называется *звездным графом*, если он состоит из ребер, входящих в одну внутреннюю вершину v. Такой граф называется пучком, если все ребра, кроме одного, являются граничными ребрами графа Ω. Здесь под графом понимается связный конечный компактный метрический граф-дерево.

Пусть $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\} = \partial\Omega \subset V$ граничные вершины, то есть если $d(v)$ – индекс вершины обозначает число ребер, входящих в эту вершину, то $\partial\Omega = \{v \in V | d(v) = 1\}$. Мы допускаем, что никакая вершина не имеет индекс 2, или же мы можем рассматривать эквивалентный граф с двумя совпавшими ребрами. Следовательно, $V \backslash \partial\Omega = \{v \in V | d(v) > 2\}$.

Под *квантовым графом* мы подразумеваем метрический граф с дифференциальными операторами, определенными на ребрах графа, соединенных в вершине с конкретными условиями согласования. Такой структурный граф играет фундаментальную роль во многих задачах в области науки и техники. Классическая задача, которая возникает из практических приложений, в том числе и для гиперболических уравнений, является задача вибрации на гибких конструкциях из струн, балок и кабелей. Известны работы, где были исследованы приложения на меньших масштабах длины. К ним относятся иерархические материалы, такие как керамические или металлические пены и перколяции сетей. Также большое внимание привлекли углеродные и графеновые нанотрубки.

Рассмотрим параболическую обратную задачу для специальных классов квантовых графов. Наша мотивация исходит из диффузии потенциала в дендритном дереве. Если $v(x,t)$ потенциал на неразветвленном дендритном интервале, рассматриваемом как *пассивный* кабель, то кабельная модель [1] принимает вид:

$$Cv_t + \sum_{j=1}^{k} g_j(v - E_j) = \frac{a}{2R} v_{xx}, \qquad (1)$$

где параметры $C, a, R, g_j, E_j,\ j = 1, 2, \ldots, k$, представляют собой физические характеристики задачи.

Переходя к безразмерным координатам, приходим к уравнению:

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = p\,h(x). \tag{2}$$

Типичными граничными условиями для нас будут граничные условия Неймана, представляющие собой управление продольным потоком. Начальное распределение потенциала предполагается нулевым $u|_{t=0} = 0$. Поскольку задача (2) может интерпретироваться по-разному, отличаться от нашей кабельной модели, мы допускаем небольшое обобщение и предполагаем, что $p = p(t)$ известная функция от t, а не константа. Ниже мы предполагаем, что $p(0) \neq 0$.

Задача, которую мы хотим решить – это уравнение (2) на графе. Поэтому рассматриваем уравнение:

$$u_{jt} - u_{jxx} + q_j(x)u_j = p(t)h_j(x) \text{ на } c_j \times (0,T), \text{ для всех } c_j \in E,$$

которое будем записывать более кратко, как:

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = p(t)h(x) \text{ на } E \times (0,T), \tag{3}$$

вместе с начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} \sum_{e_j \sim v} \partial u_j(v,t) = 0 \text{ в каждой вершине } v \in V \setminus \partial\Omega,\ \ t \in [0,T] \\ u(\cdot\,,t) \text{ непрерывны в каждой вершине для всех } t \in [0,T] \end{cases} \tag{4}$$

$$\partial u = f \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0,T], \qquad u|_{t=0} = 0 \quad \text{на} \qquad \Omega \tag{5}$$

В формуле (4) и ниже $\partial u_j(v,\ \cdot)$ означает производную функции u по направлению к вершине v, взятую вдоль ребра e в направлении от вершины. Кроме того, $e_j \sim v$ означает ребро e_j, входящее в вершину v, а сумма берется по всем ребрам, входящим в v. Выражение (4), представляет собой *условие согласования Кирхгофа-Неймана*. С точки зрения нейронной модели это закон сохранения токов.

Пусть $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ и $\mathcal{F}^T = L^2([0,T]; \mathbb{R}^m)$. Известно, что существует единственное решение начально-краевой задачи (3) - (5), и этот результат следует, например, из [2].

Теорема 1. Если $f, p \in \mathcal{F}^T, q, h \in \mathcal{H}$, то для каждого $t \in [0,T]$, $u = u^f(\cdot,t) \in \mathcal{H}$ и $u^f \in C([0,T];\mathcal{H})$, где u^f обобщенное решение (3) - (5).

В процессе решения обратной задачи мы предполагаем, что $p \in H^1(0,T)$. Задаем *оператор отклика* $\tilde{R}^T: \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ как:

$$\left(\tilde{R}^T f\right)(t) = u^f(\cdot,t), \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Обратная задача состоит в восстановлении топологии графа, длин ребер, и векторов $q(\cdot)$ и $h(\cdot)$, известных по $\tilde{R}^T f$ для всех $f \in \mathcal{F}^T$. Это также означает, что нам известны $\tilde{R}^T f$ при $f \equiv 0$. Решение задачи (3) - (5) можно записать в виде $u = y + z$, учитывая, что y и z являются решениями, соответственно, следующих задач:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)y = 0 & \text{на } E \times (0,T) \\ \partial y = f & \text{на} \quad \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} + q(x)z = p(t)h(x) & \text{на } E \times (0,T) \\ \partial z = f & \text{на} \quad \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{8}$$

с y и z, удовлетворяющими условиям согласования Кирхгофа-Неймана на $V \backslash \partial\Omega$ и нулевым начальным условиям. Представим решение уравнения (7) в виде y^f. Отсюда, для (7) оператор отклика $\tilde{R}^T: \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$дается формулой

$$(R^T f)(t) = y^f_{|\partial\Omega} = u^f_{|\partial\Omega} - y^0_{|\partial\Omega} = \tilde{R}^T f - \tilde{R}^T \tag{9}$$

Теперь обратная задача состоит в восстановлении вектора $q(\cdot)$, известного по $R^T f$ для всех $f \in \mathcal{F}^T$. Решение этой задачи заключается в следующей теореме.

Теорема 2. Оператор $R^T: \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, известный для любого $T > 0$, однозначно определяет топологию, длины ребер и потенциалы ребер $q_j, j = 1,2,\dots,N$, графа.

Теперь рассмотрим задачу (8). Обозначим решение z как u^0. Таким образом, из наших известных наблюдений имеем $\chi(t) = z_{|\partial\Omega} = u^0_{|\partial\Omega}$ и поскольку из предыдущей задачи (7) известны топология, длины ребер и потенциалы ребер $q(\cdot)$ графа, то обратная (8) состоит в использовании наблюдений

$\chi(t), t \in [0,T]$ для отыскания вектора $h(\cdot)$ на E.

Основной результат заключается в решении обратной задачи (8) и восстановлении исходных параметров проводимости. Полученные в [3, 4] результаты по существу являются первыми результатами по восстановлению, как коэффициентов уравнений, так и источников (вместе с топологией графа и длин ребер).

Пусть оператор $\mathcal{L}$, задан выражением:

$$(\mathcal{L}\phi)(x) := -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) + q(x)\phi(x), \tag{10}$$

определенным на E с областью $D(\mathcal{L}) = \mathcal{H}^2$. Здесь $\mathcal{H}^2$ пространство непрерывных функций v на Ω таких, что $v|_e \in H^2(e)$ для каждого $e \in E$, удовлетворяющих условиям согласования Кирхгофа-Неймана в каждой внутренней вершине и граничному условию $\partial\phi|_{\partial\Omega} = 0$. Спектр $\mathcal{L}$ строго дискретен, собственные числа $\{\lambda_n\}$ имеют конечную кратность и соответствующие собственные функции $\{\phi_n\}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Известно, что собственные функции ограничены и для собственных чисел справедлива оценка $|\lambda_n| + 1 \asymp n^2$.

С учетом нулевых граничных условий для теплового потока не существует нетривиальное решение задачи на собственные значения, связанной с (11), для $\lambda \notin \mathbb{R}$. Поэтому, пусть $\phi^f(x,\lambda)$ будет единственным решением начально-краевой задачи $\mathcal{L}\phi = \lambda\phi$ на E, удовлетворяющей условиям согласования Кирхгофа-Неймана на внутренних вершинах, и граничным условиям:

$$\phi'(\gamma_j,\lambda) = f^j, \quad j = 1,2,\dots,m, \quad f = \mathrm{col}(f^1, f^2, \dots, f^m), \tag{11}$$

Матричная функция Титчмарша-Вейля (TW-функция), $M(\lambda)$, однозначно определяется соотношением:

$$\phi^f|_{\partial\Omega} = M(\lambda) f(\gamma_j,\lambda) = f^j, \ j = 1,2,\dots,m, \quad f = \mathrm{col}(f^1, f^2, \dots, f^m) \tag{12}$$

TW-функция $M(\lambda) = \{M_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$, известная для $\Im\lambda > 0$, строится из наших данных и используется при решении обратной задачи на графе.

Используя условие согласования Кирхгофа-Неймана, и интегрируя по частям, решение начально-краевой задачи (8) с граничным условием (12) дадим в виде:

$$\phi^f(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n|_{\partial\Omega}\rangle}{\lambda_n - \lambda} \phi_n(x).$$

Здесь $\langle f, \phi_n|_{\partial\Omega}\rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Следовательно, матричная TW-функция $\{M_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{m}$ определяется следующим образом:

$$M(\lambda)f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n|_{\partial\Omega}\rangle}{\lambda_n - \lambda} \phi_n|_{\partial\Omega}, \qquad \text{т.е. } M_{ij}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(\gamma_i)\phi_n(\gamma_j)}{\lambda_n - \lambda}$$

Все ряды в этих выражениях сходятся в силу ограниченности собственных функций и приведенного выше роста собственных значений [5]. Для полного построения мы теперь должны восстановить *спектральные данные* $(SD) = \{\lambda_n, \phi_n|_{\partial\Omega}\}_{n\in\mathbb{N}}$ по динамическим обратным данным (оператор R^T), используя оператор связи C^T и спектральную управляемость системы (7).

Для решения обратной задачи допустим, что в задаче (8) известно $q(\cdot)$ на E и мы хотим восстановить $h(x)$ на E. Напомним, что $\chi(t) = z_{|\,\partial\Gamma}$ являются нашими наблюдениями, $p \in H^1(0,T),\ p(0) \neq 0$, и $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Тогда решение задачи (8) может быть представлено в виде:

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n\phi_n(x) \int_0^t p(t-\tau)e^{-\lambda_n t}d\tau,$$

где $h_n = (h, \phi_n)_{\mathcal{H}}$. Следовательно,

$$\chi(t) := \int_0^t p(t-s)W(s)ds,$$

где

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n\phi_n(0)e^{-\lambda_n t} \tag{13}$$

После дифференцирования выражения (4) мы придем к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $W(\cdot)$:

$$\chi'(t) = p(0)W(t) + \int_0^t p'(t-s)W(s)ds.$$

Теорема 3. Семейство $\{\phi_n(0)e^{-\lambda_n t}\}_{t\in[0,T]}$ минимально на $\mathcal{F}^T = L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$, для всех $T > 0$ с биортогональной последовательностью $\{\Theta_n\}$. Следовательно,

$$h_n = (W, \Theta_n)_{\mathcal{F}^T} \qquad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(x).$$

Теорема 3 [4] решает обратную задачу (8).

Разработка численного метода для определения Θ_n довольно сложна даже в одномерном случае. Тем не менее, для отдельно взятого ребра, скажем e_i, который мы отождествляем с интервалом $(0, l_i)$, есть прямой подход к отысканию h_n, а, следовательно, и $h(x)$. При $h_n = \left(h_{|e_i}, \phi_n\right)_{L^2(e_i}$ решение задачи (8) на e_i принимает вид

$$z(x,t) = \int_0^t p(\tau)\left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(x)\, e^{-\lambda_n(t-\tau)}\right) d\tau$$

Отсюда мы имеем

$$\chi(t) := z(0,t) = \int_0^t p(s)\left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(0) e^{-\lambda_n(t-s)}\right) ds$$

Если мы положим $Z(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(x) e^{-\lambda_n t}$, тогда Z удовлетворяет следующему уравнению

$$\begin{cases} Z_t - Z_{xx} + q(x)Z = 0 & 0 < x < l, \quad 0 < t < T \\ Z_x(0,t) = 0 = Z_x(l,t) & 0 < t < T \\ Z(x,0) = \sum_{n \geq 1} h_n \phi_n(x) = h(x) & 0 < x < l_i. \end{cases}$$

Таким образом, $z(x,t) \int_0^t p(\tau) Z(x, t-\tau)\, d\tau$, так что, если положить $r(t) := Z(0,t)$, тогда

$$\chi(t) = \int_0^t p(t-\tau) r(\tau) d\tau \tag{14}$$

Дифференцируя выражение в (14), мы приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $r(\cdot)$:

$$\chi'(t) = p(0) r(t) + \int_0^t p'(t-\tau) r(\tau)\, d\tau \tag{15}$$

Таким образом, существует единственное решение $r(t)$ при $0 < t < T$. Имея $r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{-\lambda_n t}$, где $r_n = h_n \phi_n(0)$, и зная спектральные данные $\{\lambda_n, \phi_n(0)\}$, определяемые значениями $r_n's$ и определяемые значениями $h_n's$, и, следовательно, функцией $h(x)$ на e_i.

Теперь предположим, что мы получили $r(t)$ из решения (6). Чтобы решить задачу для любого числа $r_n's$, скажем, $N \in \mathbb{N}$, положим $r_N(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n e^{-\lambda_n t}$. Один из способов вычисления:

$$V\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_N^2 \\ & & \dots & & \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \lambda_3^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_N(0) \\ -r_N'(0) \\ r_N^{(2)}(0) \\ \dots \\ (-1)^{N-1} r_{N-1}^{(N-1)}(0) \end{bmatrix}.$$

Поскольку V - определитель Вандермонда, и собственные числа простые, то V является невырожденным, так что вектор $r_n's$ может быть однозначно найден. Еще один вариант расчетов заключается в отборе малых t_1 из интервала $(0, T)$, и допущении, что $t_j = jt_1$, $j = 1, \dots, N$. Тогда можно определить $N \times N$ матрицу $M_N = \left(e^{-\lambda_j t_i}\right)$ и решить матричное уравнение $M_{N\vec{r}} = \vec{d}$, где $\vec{d}^T = \left(r(t_1), r(t_2), \dots, r(t_N)\right)$.

Матрица M_N невырожденная. Она будет вырожденной, тогда и только тогда, когда некоторые из $\lambda_n's$ равны. В одном из двух случаев мы имеем $q(\,?)$ и $h(x)$.

Задача восстановления исходных параметров проводимости теоретически будет завершена, когда мы восстановим k исходных g_j параметров проводимости. Теперь напомним, что в нашем первоначальном масштабировании уравнения кабеля мы выбирали произвольные i, $1 \le i \le k$ и определяли $u = v - E_i$.Так что N-векторы u и h, определенные на $E \times (0, T)$, должны быть проиндексированы через i; скажем, $u = u^{[i]}$ и $h = h^{[i]}$, где каждый компонент $h^{[i]}$ задается как $h_l^{[i]} = \sum_{1 \le j \le k} g_{lj} E_{ji}$. Тогда для решения обратной задачи (7) надо сначала получить $q(\cdot)$, а затем k-кратно решить обратную задачу (8) для отыскания $h^{[i]}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Матрица параметров проводимости принимает вид $\mathcal{G} = \left(g_{jl}\right) \in \mathbb{R}^{N \times k}$. Определяем $\mathcal{E} = \left(e_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{k \times k+1}$, причем $e_{i1} = \hat{R}$ и $e_{ij} = E_{i\,j-1}$ для $2 \le j \le k+1$ $1 \le i \le k$. Если $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{k+1 \times k}$ таково, что $\mathcal{E}\mathcal{K} = I_k$, где I_k представляет собой $k \times k$ матрицу идентификации, тогда $\mathcal{G} = [h]\mathcal{K}$, где

$[h]$ является $N \times k$ матрицей с i-тым столбцом $h^{[i]}$.

Заключение

В работе получены новые результаты по управляемости и идентификации как для потенциалов, так и для источников для параболического уравнения на графах-деревьях. Особенность наших подходов в следующем: проблема основана на практической задаче нейробиологии; предложена методология для восстановления произвольного числа распределенных параметров; решение проблемы опирается на метод граничного управления (BC-метод). Идеи реализации поставленных задач основываются на новом подходе к теории управления для интегро-дифференциальных уравнений, основанном на доказательстве свойств базисности Рисса семейств, квадратично близких к ортонормированным экспонентам.

Полученные результаты могут быть использованы для описания задач, возникающих в нейробиологии, в нанотехнологиях (транспортные задачи в наноструктурах) и в нефтяной промышленности (задача о наличии примеси в нефтепроводе).

Список литературы

1 Pandolfi L. Boundary controllability and source reconstruction in a viscoelastic string under external traction // J. Math. Anal. Appl. - 2013. - № 407 (2). – P. 464-479.

2 Авдонин С.А., Мурзабекова Г.Е., Нуртазина К.Б. Управление и идентификация для волновых и тепловых процессов с памятью на графах // Вестник ЕНУ. - 2015. - № 2 (105). – С. 5-11.

3 Avdonin S, Bell J. Determining a distributed conductance parameter for a neuronal cable model defined on a tree graph // J. Inv. Probs and Imaging. - 2015. - № 9. – P. 645-659.

4 Avdonin S., Bell J., Nurtazina K. Determining distributed parameters in a neuronal cable model on a tree graph // Mathematical methods in applied sciences. - 2017. - T. 40. - Vol. 11. - P. 3973-3981.

5 Avdonin S., Nicaise S. Source identification problems for the wave equation on graphs // Inverse Problems. - 2015. - № 31. - 29 pp.

6 Avdonin S. A., Murzabekova G. Y., Nurtazina K. B. Source Identification for the Differential Equation with Memory / in book Trends in Mathematics, Research Perspectives. Birkhaeuser / Springer International Publishing Switzerland, 2017. – P. 111 – 120.

7 Avdonin S., Mikhaylov V., Nurtazina K. On Inverse Dynamical and Spectral Problems // Journal of Mathematical Sciences. - 2017. - № 1 (1). – P. 1-15.

8 Avdonin S.A., Mikhaylov V.S., Nurtazina K.B. On inverse dynamical and spectral problems for the wave and Schrodinger equations on finite trees. The leaf peeling method // Zapiski POMI. - 2015. - № 438. - P. 7-21.
9 Mikhaylov A., Mikhylov V., Murzabekova G. Inverse dynamic and spectral problems for the one-dimensional Dirac system on a finite tree // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. - 2017.
10 Murzabekova G. Control and inverse problems for parabolic equation on graph // Abstracts of the first international conference ICCAWMA-2016 "Actual problems in mathematics and mechanics in Central Asia" for region of Central Asia. – Almaty, 2016. – P. 32-33.

Түйін

Берілген мақалада графтардағы дербес туындыдағы теңдеулермен сипатталатын жүйелер үшін басқару мен идентификациялау есептеріне зерттеу жүргізілді. Зерттеудің мақсаты графтардағы параболикалық теңдеулер үшін идентификация дереккөздерінің және потенциалын қалпына келтіру болып табылады.

Зерттеу XX ғасырдың 80-жылдарының соңында Санкт-Петербург математиктері ұсынған шекаралық бақылау әдісіне (Boundary Control Method) сүйінеді. Әдіс кері есептер (идентификация-лау) және динамикалық жүйелерді басқару арасындағы байланысқа негізделген. С.А.Авдонинмен өңделген рекурсивті әдіс (Leaf Peeling Method) ерекше рөл атқарады. Дифференциалдық теңдеулер теориясы, бақылау теориясы, тригонометриялық Фурье қатарларының теориясы, диф-ференциалды операторлардың спектрлік теориясы, оның ішінде метрикалық графтартағы опера-торлар да қолданылады.

Ерікті графтардағы дифференциалдық теңдеулер үшін басқару есептері мен кері есептерді шешудің жаңа әдісі ұсынылды. Зерттеу барысында келесі нәтижелер алынды: графтардағы жадынды дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған жаңа әдіс дамытылды және кері есептерді шешу алгоритмдері әзірленді; графтардағы дифференциалдық теңдеулерді басқару, потенцилдар және көздерді идентификациялау бойынша жаңа нәтижелер ұсынылды; кесіндіде, жұлдызды графта және ағаштарда жадынды дифференциалдық теңдеулердегі басқару және кері есептердің шешімін табу үшін алгоритмдер әзірленген; графтардағы спектралдық және динамикалық есептерді шешу үшін сандық тесттер орындалған.

Зерттеулер нәтижелерінің теориялық жағынан да -графтардағы жадынды дифференциалдық теңдеулер теориясындағы зерттеулердің дамуы, сондай-ақ, биологиялық процесстердегі, атап айтқанда нейробиология, нанотехнология, химия және мұнай өнеркәсібіндегі қосымшалар жағынан да қолданылуы жоғары.

Summary

In this paper, we consider the control and identification problem for systems described by partial differential equations on graphs. Our aim is to recover the potentials and identification source for a parabolic equation on graphs.

The method of boundary control which was proposed by St.-Petersburg mathematicians in the late 80-ies of the twentieth century is the basic method. The method is based on the connection between inverse problems (identification) and controllability of dynamical systems. A special role is played by the Leaf Peeling Method developed by S.A. Avdonin. The implementation of this research is carried out using methods and results from different areas of mathematics: mathematical analysis, functional analysis, special sections of the theory of differential equations, optimal control theory, theory of trigonometric Fourier series, computational mathematics, numerical analysis, and the spectral theory of differential operators including operators on metric graphs.

A new approach to solving control and inverse problems for differential equations on arbitrary graphs is proposed.

The following results were obtained during the research: a new approach to solving control problems and inverse problems for differential equations with memory on graphs is developed; new results on controllability and identification of potentials and sources for differential equations on graphs are obtained; algorithms for solving control problems and inverse problems for differential equations with memory on an interval, star graph and trees have been developed; numerical tests to solve dynamic problems on graphs are performed.

The results of this study are applicable both theoretically - the development of research in the theory of differential equations with memory on graphs, and in biological processes, in particular neurobiology, nanotechnology, in the chemical and petroleum industries.