С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым жаршысы (пәнаралық)** = **Вестник науки** Казахского агротехнического университета им. С.Сейфуллина (**междисциплинарный**). - 2018. - №3 (98). - Б.179-185

Анықталмаған интегралдағы бөліктеп интегралдаудың әдістерінің бірі

Тілепиев М.Ш.,Уразмагамбетова Э.У., Жароева А.Г.

Аннотация

Бұл жұмыста жоғары математика курсының маңызды тарауларының бірі математикалық талдау бөлімінде оқытылатын интегралдық есептеудің тиімді әдістерінің бірі –бөліктеп интегралдау тақырыбын оқытудың ерекше бір әдісі қарастырылған. Көп жағдайларда бөліктеп интегралдау формуласын қолдану кезінде екі немесе одан көп рет қолдануға тура келеді. Ол есеп ұзағырақ есептеліп шығарылады. Сондықтан біз осы мақалада бөліктеп интегралдаудың күрделірек формуласын ұсынып отырмыз. Бұл формуланы қолдану арқылы есепті тезірек шығаруға болады.

Жалпы алғанда бөліктеп интегралдау әдісі айнымалыны ауыстырудан қиын және қолдану облысы тарлау болса да, тек қана осы әдіспен интегралданатын интегралдар бар.

Интегралдау кезінде айнымалыны ауыстыру тәсілі мен бөліктеп интегралдау әдісін тізбектеп (бірінен соң бірін) қолдану керек болатын жағдайлар да кездеседі.

Бөліктеп интегралдау формуласын қолдану үшін интеграл астындағы өрнекті көбейткіштерге жіктеудің жалпы ережесі оқулықтарда көп кездесе бермейді. Қандай жағдай болғанда да, интеграл астындағы өрнекті көбейткіштерге жіктеуде көбейткіш u*-ды дифференциалдау, ал көбейткіш* $\nu' dx$*-ты интегралдау нәтижесінде бөліктеп интегралдау формуласының оң жағындағы интегралдың интегралдануы жеңіл болуы ескерілуі қажет. Бөліктеп интегралдауды қолданудың өз әдістері бар.*

Кілттік сөздер: *математикалық талдау, бір айнымалылы функцияның туындысы, алғашқы функция, анықталмаған интеграл, бөліктеп интегралдау.*

Бұл жұмыста жоғары математика курсында оқытылатын анықталмаған интегралды бөліктеп интегралдау тақырыбын оқыту жолдары қарастырылған.

Көп жағдайларда бөліктеп интегралдау формуласын қолдану кезінде екі немесе одан көп рет қолдануға тура келеді. Ол есепті ұзағырақ есептеуге тура келеді. Сондықтан біз осы мақалада бөліктеп интегралдаудың күрделірек формуласын беріп отырмыз. Бұл формуланы қолдану арқылы есепті тезірек шығаруға болады.

Бөліктеп интегралдаудың күрделі әдістерінің бірі

Жоғары математика курсынан $[a,b]$ аралығында $u=u(x),\quad v=v(x)$ дифференциалданатын функциялары үшін анықталмаған интегралды бөліктеп интегралдау формуласы белгілі [1]

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{1}$$

немесе оны былай жазайық

$$\int uv'dx = \begin{vmatrix} u & u' \\ & \\ v' & v \end{vmatrix} = uv - \int u'v\,dx \tag{2}$$

Бұл формуланы да бөліктеп интегралдау формуласы дейді. (2) формуласында u функциясының туындысын, ал v' функциясының алғашқы функциясын (интегралын) табу керек.

Бұл жағдайда u және v' функцияларын қалай таңдау керек.

Егер $\int xe^{ax}dx,\quad \int x\cos bx\,dx,\quad \int x\sin bx\,dx$ интегралдарын есептеу үшін $u=x$ деп, ал v' функциясын сәйкесінше $v'=e^{ax},\quad v'=\cos bx,\quad v'=\sin bx$ деп алу керек.

$\int x^n\ln x\,dx,\quad \int \arcsin x\,dx,\quad \int arctgx\,dx$ интегралдарын есептеу үшін u функциясын сәйкесінше $u=\ln x,\quad v=\arcsin kx,\quad v=arctgkx$ деп, ал v' функциясы үшін сәйкесінше $v'=x^n,\quad v'=1,\quad v'=1$ деп алу керек [2].

Мысалдар қарастырайық:

$\int x\cos bx\,dx$ интегралын есептеу керек. Ол үшін (2) формуласын қолданамыз. Мұнда

$$\int x\cos bx\,dx = \begin{vmatrix} u=x & u'=1 \\ & \\ v'=\cos bx & v=\dfrac{1}{b}\sin bx \end{vmatrix}$$

Осыдан

$$\int x\cos bx\,dx = \frac{x}{b}\sin bx - \int \frac{1}{b}\sin bx\,dx = \frac{x}{b}\sin bx + \frac{1}{b^2}\cos bx + C$$

$\int arctgkxdx$ интегралын есептеу керек.

$$\int arctgkxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgkx & u' = \dfrac{k}{1+k^2x^2} \\ & \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right|$$

Осыдан

$$\int arctgkxdx = xarctgkx - \int \frac{kxdx}{1+k^2x^2} = xarctgkx - \frac{1}{2k}\ln\left|1+k^2x^2\right| + C$$

Келесі $\int xe^{ax}dx,\quad \int x\sin bxdx,\quad \int x^n \ln xdx,\quad \int \ln xdx,\quad \int \arcsin kxdx$ интегралдарын оқырмандарға өз бетімен шығаруды ұсынамыз.

Енді $uv' - u'v$ өрнегін қарастырайық. Оның туындысы

$$(uv' - u'v)' = u'v' + uv'' - u''v - u'v' = uv'' - u''v$$

немесе

$$uv'' = (uv' - u'v)' + u''v \qquad (3)$$

Екі жағын интегралдасақ, онда

$$\int uv''dx = uv' - u'v + \int u''vdx \qquad (4)$$

формуласын алуға болады. Бұл формуланы екінші ретті бөліктеп интегралдау формуласы дейді [3].

(4) формуланы схемалық түрде былай жазуға болады:

$$\int uv''dx = \left| \begin{matrix} u & u' & u'' \\ & & \\ v'' & v' & v \end{matrix} \right| = uv' - u'v + \int u''vdx$$

(4) формуласын (2) формуласының көмегімен де алуға болады. Ол үшін $\int uv''dx$ интегралын қарастырайық. Оған (2) формуланы 2 рет қолдансақ, онда

$$\int uv''dx = \left| \begin{matrix} u & u' \\ & \\ v'' & v' \end{matrix} \right| = uv' - \int u'v'dx = \left| \begin{matrix} u' & u'' \\ & \\ v' & v \end{matrix} \right| = uv' - \left(u'v - \int u''vdx\right) =$$

$$=uv'-u'v+\int u''v\,dx$$

болады.

(4) формуласында u функциясының бірінші және екінші ретті туындыларын, ал v'' функциясының v' функциясы мен алғашқы v функциясын табамыз [4].

Мысалдар қарастырайық:

$\int x^2e^{ax}dx$ интегралы (3) формуласының көмегімен есептеу керек.

$$\int x^2e^{ax}dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & u'=2x & u''=2 \\ v''=e^{ax} & v'=\frac{1}{a}e^{ax} & v=\frac{1}{a^2}e^{ax} \end{vmatrix}=\frac{x^2}{a}e^{ax}-\frac{2x}{a^2}e^{ax}+\frac{2}{a^2}\int e^{ax}dx=$$

$$\frac{x^2}{a}e^{ax}-\frac{2x}{a^2}e^{ax}+\frac{2}{a^3}e^{ax}dx=\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax}+C.$$

$\int e^{ax}\cos bx\,dx$ интегралын (4) формуласының көмегімен есептеу керек.

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\begin{vmatrix} u=e^{ax} & u'=ae^{ax} & u''=a^2e^{ax} \\ v''=\cos bx & v'=\frac{1}{b}\sin bx & v=-\frac{1}{b^2}\cos bx \end{vmatrix}=\frac{a}{b}e^{ax}\sin bx+ \tag{5}$$

$$+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

теңдігінің сол жағындағы интегралды оң жағына шығарсақ, онда

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

немесе

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)+C.$$

Келесі

$$\int x^2\cos bx\,dx,\quad \int x^2\sin bx\,dx,\quad \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

интегралдарын оқырмандарға өз бетімен шығаруды ұсынамыз.

Ескерту.

$$\int x^n \ln^2 x dx, \quad \int x \arcsin kx dx, \quad \int x\, arctg kx dx, \quad \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

интегралдарына (3) формуласын қолдану тиімсіз. Оларға (2) формуласын екі рет қолдану керек [5].

Енді

$$uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \ldots + (-1)^{n-3}u^{(n-3)}v'' + (-1)^{n-2}u^{(n-2)}v' + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v$$

өрнектерін қарастырып, оның туындысын алайық

$$\left(uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \ldots + (-1)^{n-3}u^{(n-3)}v'' + (-1)^{n-2}u^{(n-2)}v' + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\right)' =$$
$$= u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} - u''v^{(n-2)} - u'v^{(n-1)} + u'''v^{(n-3)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-3}u^{(n-2)}v'' +$$
$$+ (-1)^{n-3}u^{(n-3)}v''' + (-1)^{n-2}u^{(n-1)}v' + (-1)^{n-2}u^{(n-2)}v'' + (-1)^{n-1}u^{(n)}v + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v' =$$
$$= uv^{(n)} + (-1)^{n-1}u^{(n)}v$$

Осыдан

$$uv^{(n)} = \left[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \ldots + (-1)^{n-3}u^{(n-3)}v'' + (-1)^{n-2}u^{(n-2)}v' + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\right] +$$
$$+ (-1)^{n-1}u^{(n)}v \qquad (6)$$

Екі жағын интегралдасақ, онда

$$\int uv^{(n)}dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \ldots + (-1)^{n-3}u^{(n-3)}v'' + (-1)^{n-2}u^{(n-2)}v' + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v +$$
$$+ (-1)^n \int u^{(n)}v dx \qquad (7)$$

формуласын алуға болады. Бұл формуланы *n*-ші ретті бөліктеп интегралдау формуласы дейді [6].

Дербес жағдайда, егер $n=2$ болса, онда (4) формуласын алуға болады. Егер $n=3$ болса, онда

$$\int uv'''dx = uv'' - u'v' + u''v - \int u'''v dx \qquad (8)$$

Мысал қарастырайық

$\int x^n e^{ax} dx$ интегралын (7) формуласының көмегімен шығарайық.

$$\int x^n e^{ax}dx = \left| \begin{array}{llll} u=x^n & u'=nx^{n-1} & u''=n(n-1)x^{n-2} & \dots \quad u^{(n-2)}=n(n-1)\dots 4\cdot 3x^2 \\ v^{(n)}=e^{ax} & v^{n-1}=\frac{1}{a}e^{ax} & v^{(n-2)}=\frac{1}{a^2}e^{ax} & \dots \quad v''=\frac{1}{a^{n-2}}e^{ax} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ll} u^{(n-1)}=n(n-1)\dots 3\cdot 2x & u^{(n)}=n(n-1)\dots 2\cdot 1 \\ v'=\frac{1}{a^{n-1}}e^{ax} & v=\frac{1}{a^n}e^{ax} \end{array} \right| = \frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a^2}x^{n-1}e^{ax} + \frac{n(n-1)}{a^3}x^{n-2}e^{ax} -$$

$$- \dots + (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)\dots 4\cdot 3}{a^{n-1}}x^2e^{ax} + (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\dots 3\cdot 2}{a^n}xe^{ax} + (-1)^n\frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{a^n}\int e^{ax}dx =$$

$$\left[\frac{x^n}{a} - \frac{n}{a^2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^3}x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)\dots 4\cdot 3}{a^{n-1}}x^2 + (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\dots 3\cdot 2}{a^n}x + \right.$$

$$\left. + (-1)^n\frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{a}\right]e^{ax} + C$$

Келесі мысалды қарастырайық

$\int x^3 \sin bxdx$ интегралын (8) формуласының көмегімен шығарайық.

$$\int x^3 \sin bxdx = \left| \begin{array}{llll} u=x^3 & u'=3x^2 & u''=6x & u'''=6 \\ v'''=\sin bx & v''=-\frac{1}{b}\cos bx & v'=-\frac{1}{b^2}\sin bx & v=\frac{1}{b^3}\cos bx \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x^3}{b}\cos bx + \frac{3x^2}{b^2}\sin bx + \frac{6x}{b^3}\cos bx - \frac{6}{b^3}\int \cos bxdx = -\frac{x^3}{b}\cos bx + \frac{3x^2}{b^2}\sin bx +$$

$$\frac{6x}{b^3}\cos bx - \frac{6}{b^4}\sin bx + C = \left(-\frac{x^3}{b} + \frac{6x}{b^3}\right)\cos bx + \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{6}{b^4}\right)\sin bx + C$$

Оқырмандарға

$$\int x^3 e^{ax}dx, \quad \int x^3 \cos bxdx, \quad \int x^4 \cos bxdx, \quad \int x^n \cos bxdx$$

интегралдарын өздеріне шығаруды ұсынамыз.

Кейбір жағдайларда бөліктеп интегралдауды екі немесе одан да көп рет қолдануға тура келеді, ол есепті ұзағырақ есептеу керек болады.

Қорыта келгенде, ұсынылып отырған әдіс интегралдау кезінде бөліктеп интегралдауды көп рет қолдануға тура келген кезде ыңғайлы деп есептейміз. Бөліктеп интегралдау формуласын қолдану үшін интеграл астындағы өрнекті көбейткіштерге жіктеудің жалпы ережесі оқулықтарда көп кездесе бермейді. Қандай жағдай болғанда да, интеграл астындағы өрнекті көбейткіштерге жіктеуде көбейткіш u-ды дифференциалдау, ал көбейткіш $v'dx$-ты интегралдау нәтижесінде бөліктеп интегралдау формуласының оң жағындағы интегралдың интегралдануы жеңіл болуы ескерілуі қажет. Сонда да болса, мынадай жекеленген ескертулерді пайдалануға болады.

Егер интеграл астындағы өрнек көрсеткіштік немесе тригонометриялық функциялар мен көпмүшенің көбейтіндісі болса, онда көбейткіш u үшін көпмүшені алу керек. Ал егер де интеграл астындағы өрнек логарифмдік немесе кері тригонометриялық функциялар мен көпмүшенің көбейтіндісі болса, онда көбейткіш u үшін логарифмдік немесе кері тригонометриялық функцияны алу керек. Бұл формуланы қолдану арқылы есепті тезірек шығаруға болады.

Әдебиеттер тізімі

1.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Часть 1. 2011.

2.Е.Ә. Ақжігітов, М.Ш.Тілепиев, Э.У. Уразмагамбетова, А.Г. Жароева. Кредиттік оқыту технологиясы бойынша оқытудағы студенттердің өзін-өзі жетілдіру мәселелері. Қазақстанның жоғары мектебі №1-Астана, 2016. – С. 23-25.

3.Hoseana, J Extending the substitution method for integration. The Mathematical Gazette. Volume 101, Issue 552. November 2017 , pp. 538-541

4. Jator S. N.; Coleman, N. A nonlinear second derivative method with a variable step-size based on continued fractions for singular initial value problems. COGENT MATHEMATICS Том: 4 Выпуск: 1 JUN 8 2017

5.Babajanov, B. A.; Khasanov, A. B. Integration of equation of toda periodic chain kind. Ufa Mathematical journal Том: 9 Выпуск: 2 Стр.: 17-24 JUN 2017

6. Postma, T. C.; White, J. G.Students' perceptions of vertical and horizontal integration in a discipline-based dental school. European journal of dental education. Том: 21 Выпуск: 2 Стр.: 101-107 MAY 2017

References

1. Piskunov N.S. Differencialnoe i integralnoe iscislenie. Part 1. 2011.

2. E.A. Akzhigitov, M.Sh. Tilepiev, E.U. Urazmagambetova, A.G. Zharoeva. Credittik okytu texnologieasy boiynsha okytudagy studentterding ozin-ozi zhetildiru maseleleri. Kazakhstannyng zhogary mektebi. №1-Астана, 2016. – pp. 23-25.

3.Hoseana, J Extending the substitution method for integration. The Mathematical Gazette. Volume 101, Issue 552. November 2017 , pp. 538-541

4. Jator, S. N.; Coleman, N. A nonlinear second derivative method with a variable step-size based on continued fractions for singular initial value problems. COGENT MATHEMATICS Том: 4 Выпуск: 1 JUN 8 2017

5. Babajanov, B. A.; Khasanov, A. B. Integration of equation of toda periodic chain kind. Ufa Mathematical journal Part 9 Vypusk: 2 pp. 17-24 JUN 2017

6. Postma, T. C.; White, J. G.Students' perceptions of vertical and horizontal integration in a discipline-based dental school. European journal of dental education. Tom: 21 Vypusk: 2 pp. 101-107 MAY 2017

Один из методов интегрирования по частям в неопределенном интеграле

Тилепиев М.Ш., Уразмагамбетова Э.У.,
Жароева А.Г.

Резюме

В этой работе рассматривается важный метод интегрального исчисления раздела математического анализа курса высшей математики- один из видов метода интегрирования по частям. Во многих случаях при применении метода интегрирования по частям приходится применять этот метод несколько раз, что усложняет решение задачи. Поэтому в статье рассматривается обобщенный вариант применения этого метода. Применение показанной формулы позволяет решить задачу быстрее.

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. При интегрировании методом интегрирования по частям существует ряд особенностей. Надо учесть некоторые замечания при применении метода интегрирования по частям.

Если подынтегральное выражение дано в виде произведения многочлена на показательную или тригонометрическую функцию, то за u *надо взять многочлен, а если подынтегральное выражение дано в виде произведения многочлена на логарифмическую или обратную*

тригонометрическую функцию, то через u надо взять логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию.

При интегрировании надо учитывать эффективность нахождения интеграла той функции, который известен или находится быстрее в зависимости от более удобного пути интегрирования.

Ключевые слова: *математический анализ, производная функции одной переменной, первообразная, неопределенный интеграл, интегрирование по частям.*

One of Methods of Integrating by Parts in Indefinite Integral

Tilepiev M.Sh.,Urazmagambetova E.U., Zharoyeva A.G.

Summary

One of the parts "Differentiation and integration of a function of one variable" of higher mathematics, the section "Indefinite integral" is important for students of higher technical institutions.

The paper considers an important method of integral calculus of the mathematical analysis of the higher mathematics course - one of the types of integration by parts. In many cases, we have to apply the method of integration by parts several times, the solution of the problem complicates. Therefore, the article considers a generalized version of the application of this method. The application of the shown formula allows to solve the problem more quickly.

The rule of integration by parts is used in many cases. Integration by method of integration by parts has a number of peculiarities. It is necessary to take into account some remarks for applying the method of integration by parts.

If the integrand is given by a product of a polynomial and an exponential or trigonometric function, then u is a polynomial, and if the integrand is given by a product of a polynomial and a logarithmic or inverse trigonometric function, then u is the logarithmic or inverse trigonometric function.

For integrating we must pay an attention on the efficiency of finding the integral of a function that is known or is faster depending on a more convenient way of integration.

Keywords: mathematical analysis, derivative of function of one variable, antiderivative, indefinite integral, integration by parts.