С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің **Ғылым жаршысы (пәнаралық)** = **Вестник науки** Казахского агротехнического университета им. С.Сейфуллина (**междисциплинарный**). - 2020. - №1 (104). - Б.164-171

ПЕРИОДТЫ ЭЛЕКТРЛІК СИГНАЛДАРДЫ MATHCAD ҚОЛДАНБАЛЫ ПАКЕТІ КӨМЕГІМЕН ЗЕРТТЕУ

Мукушев Б.А.

С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті

Аннотация

Мақалада периодты функцияларды Фурье қатарына жіктеу жоғары математика тұрғысынан жан-жақты қарастырылған. Дирихле шарты бойынша функция белгілі бір аралықтарда максимум және минимум шамаларға ие болу қасиеті қолданылған. Егер периодты сигналды сипаттайтын функция жұп болса, онда қатар косинусоидалды құраушыдан ал – тақ болса, синусоидалды құраушыдан тұратыны қарастырылған. Мақалада электрлік сигналдарды зерттеуге қажетті сандық әдістердің нәтижелері баяндалған. Сандық әдістерді қолдану Mathcad пакеті көмегімен іске асқан. Жұп және тақ функцияларды Фурье қатарына жіктеу әдістерінің ерекшеліктері ашылған. Периодты электр сигналдарының гармониялық анализінің нәтижелері графиктік, сандық және аналитикалық түрде берілген. Периодты функциялар түрінде берілген электрлік сигналдарды Фурье қатарына жіктеген кездегі алынған мүшелердің қосындысын есептеуге арналған әдіс қарастырылған.

Түйін сөздер. Фурье қатары, **с**андық әдістер, Mathcad пакеті, Дирихле шарты, периодты электрлік сигналдар, гармоникалық тербелістер, жұп және тақ функциялар, кернеу графиктері, қатар коэффициенттері.

Кіріспе

Периодты және периодсыз электрлік сигналдар электротехника, радиотехника және компьютерлік ғылымның әр түрлі салаларында жан-жақты қолданыс табуда. Периодтық сигналдың қарапайым түрі гармоникалық сигнал немесе синусоида болып табылады, ол амплитудамен, периодпен және бастапқы фазамен сипатталады. Периодты емес сигналдар ангармоникалық немесе синусоидалы емес болады. Сонымен қатар, егер де электр тізбегінің кіріс сигналы периодты болып табылса, онда тізбекте пайда болған токтар мен кернеулер (шығыс сигналдары) периодты болады. Бұл жағдайда түрлі тармақтардағы сигналдардың түрлері бір-бірінен ерекшеленетін болады.

Электр тізбегіндегі периодтық ангармоникалық сигналдарды зерттеудің жалпы әдістемесі бар. Бұл әдістеме Фурье қатарына сигналдардың жіктелуіне негізделген. Демек кез-келген ангармоникалық периодты электрлік сигналды әр түрлі амплитудтармен, жиіліктермен және бастапқы фазалармен сипатталатын гармоникалық (яғни синусоидалды) тербелістердің алгебралық қосындысы ретінде қарастыруға болады [1-3].

Зерттеу материалдары және әдістемесі

Периодтты электрлік сигналдарды Фурье қатарына жіктеуге қатысты нақты мысалдарға талдау жасаймыз және осы құбылысты MathCAD қолданбалы программалар пакеті көмегімен зерттейміз. MathCad – инженерлік және ғылыми есептеулерді жүргізуге арналған математикалық пакет. Пакеттің ең негізгі ерекшелігі тілінің табиғи тілге ұқсас жатқандығында. Текстік редактордың математикалық мүмкіндіктерін біріктірген бұл пакет физикалық модельдеу үшін көп мүмкіндік береді. MathCad класының жүйесінің физикалық зерттеулерді жүргізудегі рөлі ерекше. Күрделі есептеулерді шешуді жеңілдете отырып, ол зерттеу кезіндегі қиындықты біршама жеңілдетеді.

MathCad қолданбалы программалар пакеттің графикалық мүмкіндіктері ғылыми есептеулерді мәтінмен қатар графиктік кескіндермен, суреттермен, кестелермен безендіруге мүмкіндік береді. Оның практикалық қолданысы интелектуалды жұмыстардың тиімділігін арттырады. Қолданушы өзінің ғылыми еңбегіне өзгерістер енгізе отырып оның нәтижесін сол бетте бірден бақылай алады. Документтің экрандағы көрінісі қағаз бетіндегі көрінісіне өте ұқсас. MathCad алғаш рет 1986 жылы пайда болды. Пакет әр нұсқасы сайын көптеген мүмкіндіктерімен толықтырылып, жетілдіріліп отыр. Қазіргі кезде MathCad Windows жүйесінде жұмыс істейтін нұсқасы бар [4-5].

Ғылыми-зерттеу жұмысының нәтижелері

1. **Периодты функциялар және оларды талдаудың теориялық сұрақтары.** Белгілі француз ғалымы Ж. Б. Фурье (1768–1830г.г.) кейбір уақытқа тәуелділік түрінде берілген функцияларды шектеулі немесе шектеусіз гармониялық тербелістердің қосындысы түрінде беруге болатынын дәлелдеді. Мұндағы гармониялық тербелістердің амплитудасы, жиілігі және бастапқы фазалары әр түрлі болады. Ал гармониялық тербелістер қатары Фурье қатары деп аталды.

Алдымен $x(t) = x(t+ nT)$ шартына бағынатын периодты синусоидалды емес функция туралы түсінік бере кетейік. Мұндағы Т – синусоидалды емес сигналдың периоды, *n* – натурал сандар (*n* =1,2,3,….). Егер периодты синусоидалды емес функция Дрихле шартына бағынатын болса, онда аталған функция мына түрдегі Фурье қатарына жіктеле алады [1,2]:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosn\omega_1 t + b_n sinn\omega_1 t) \quad (1)$$

(1) теңдеуді мына түрде де жазуға болады:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) \quad (2)$$

мұндағы: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ - n-інші гармониканың амплитудасының модулі,

$\varphi_n = argtg\frac{b_n}{a_n}$ - n-інші гармониканың фазасы, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ - дөңгелек жиілік.

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, cosn\omega_1 tdt$ – косинусоидалды құраушының коэффициенті;

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, sinn\omega_1 tdt$ - синусоидалды құраушының коэффициенті;

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt$ - бір период уақыттағы функцияның орташа шамасы (тұрақты құраушы).

Дирихле шарты былай айтылады: *f(t)* функциясы [-T/2; T/2] аралығында, біріншіден, максимум және минимум шамаларға ие болуы керек; екіншіден, аргументтің кейбір $t=t_i$ мәндерінде үзілісті болуы мүмкін; үшіншіден, соңғы шектілі *x(-T/2+0), x(T/2-0)* мәндерге ие болуы керек. Бұл мәндер өзара тең немесе тең емес болуы мүмкін.

2. ***Периодты функцияларды Mathcad пакеті көмегімен Фурье қатарына жіктеу***. Периодты болатын жұп және тақ функцияларды қарастырайық .

Қатардың жеке қосылғыштары гармоника деп аталады. *n* саны гармониканың номері болып табылады. (2) теңдеудегі A_n жиынтығын амплитуда спектрі, ал j_n жиынтығын фаза спектрі деп атайды. Егер периодты сигналды сипаттайтын f(t) функция жұп болса, онда (1) теңдеудегі қосынды косинусоидалды құраушыдан ал – тақ болса, синусоидалды құраушыдан тұрады [6-8].

Мысал 1. Түзетілген кернеудің уақытқа тәуелділігі $U(t) = U|sin\,\varphi|$ түрінде берілген.

Кернеу амплитудасы U = 310 Вольт, j = 100pt

Тапсырмалар:

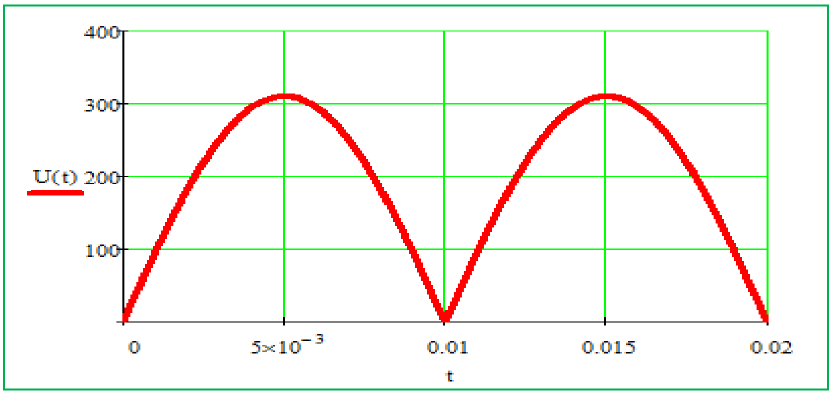
1. Тізбекке түсірілген кернеудің уақытқа тәуелділік графигін Mathcad пакеті көмегімен салу керек.

2. Кернеудің Фурье қатарының алғашқы бірнеше мүшелерінің қосындысы түріндегі U(t) өрнегін табу;

3. Осы қатарлардың қосындыларын график түрінде бейнелеу.

Тапсырманың орындалу барысында функцияның жұптылығы ескеріледі:

1. Mathcad пакеті көмегімен салынған уақытқа тәуелділік графигі 1 суретте көрсетілген.



Сурет 1 - Кернеудің Mathcad пакеті көмегімен салынған уақытқа тәуелділік графигі

2. Периодты функцияларға арналған *Фурье қатарындағы мүшелердің қосындысын есептеу әдісін* қарастырамыз. Бұл әдіс бірнеше амалдардан тұрады.

Алдымен 1 суретте көрсетілген периодты кернеу үшін жіктелген Фурье қатарындағы коэффициенттерді табу керек. Ол үшін Mathcad пакеті көмегімен амалдар орындаймыз [6,7]. Бірінші амалдың көмегімен қатар құрамындағы косинусоидалды құраушылардың коэффициенттерін, ал екінші амал көмегімен – синусоидалды құраушының коффициенттерін есептейді. Карастырып отырған функциямыз жұп болғандықтан бірінші амал іске қосылады

.

$$\mathrm{CFurCoef}(U, L, n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \dfrac{\left(\int_{-L}^{L} U(\varphi)\cdot\cos\left(\pi\cdot n\cdot\dfrac{\varphi}{L}\right) d\varphi\right)}{L} \\ s \end{array} \right. \qquad \mathrm{SFurCoef}(U, L, n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \dfrac{\left(\int_{-L}^{L} U(\varphi)\cdot\sin\left(\pi\cdot n\cdot\dfrac{\varphi}{L}\right) d\varphi\right)}{L} \\ s \end{array} \right.$$

Үшінші амал арқылы Фурье қатарының өзін есептейді. Бұл амалдың құрамында жоғарыда қарастырып кеткен амалдар да бар.

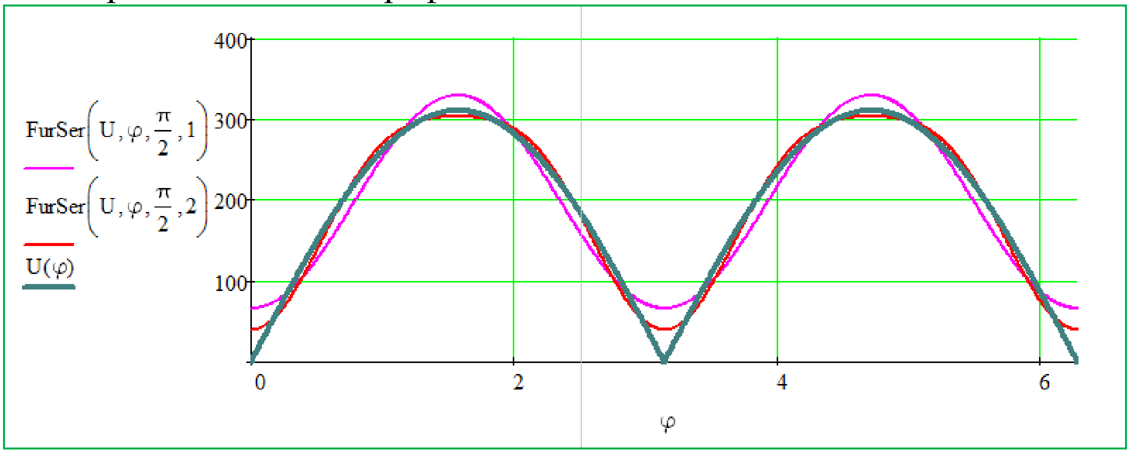
$$FurSer(U,x,L,N) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \frac{CFurCoef(U,L,0)}{2} + \sum_{m=1}^{N} \left(CFurCoef(U,L,m)\cdot\cos\left(\pi\cdot m\cdot\frac{x}{L}\right) + SFurCoef(U,L,m)\cdot\sin\left(\pi\cdot m\cdot\frac{x}{L}\right)\right) \\ s \end{array}\right.$$

Фурье қатары символдық түрде есептеледі. Сондықтан да, қатар есептелетін нүкте ретінде айнымалының символдық аталуы көрсетіледі, ал оператор ретінде стрелка алынған. Төменде U(t) периодты кернеудің қатарының бірінші мүшесі және алғашқы екі мүшесінің қосындысы берілген.

$$U := 310 \quad U(\varphi) := U\left|\sin(\varphi)\right| \quad FurSer\left(U,\varphi,\frac{\pi}{2},1\right) \rightarrow \frac{620}{\pi} - \frac{1240\cdot\cos(200\cdot\pi\cdot t)}{3\cdot\pi}$$

$$FurSer\left(U,\varphi,\frac{\pi}{2},2\right) \rightarrow \frac{620}{\pi} - \frac{248\cdot\cos(400\cdot\pi\cdot t)}{3\cdot\pi} - \frac{1240\cdot\cos(200\cdot\pi\cdot t)}{3\cdot\pi}$$

2. 3 суретте U(t) = U $|sin\varphi|$ функциясының, Фурье қатарының бірінші мүшесінің және алғашқы екі мүшесінің қосындысының (0, 2p) интервалындағы графигі берілген. Егер қосылатын қатар мүшелерінің санын өсірсек, онда есептеудің дәлдігі де артады.



Сурет 4 – U(t) = U $|sin\varphi|$ функциясының қосылатын мүшелердің санына байланысты графиктер шешімдер

1 мысалдың сандық шешімі мен теориялық шешімі сәйкес келеді. $|sin100\pi t|$ өрнегінің Фурье қатарына жіктелуіне назар аударайық [5]:

$$|sin100\pi t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}cos200\pi t + \frac{1}{15}cos400\pi t + \cdots + \frac{1}{(2n)^2-1}cosn100\pi t + \cdots\right)$$

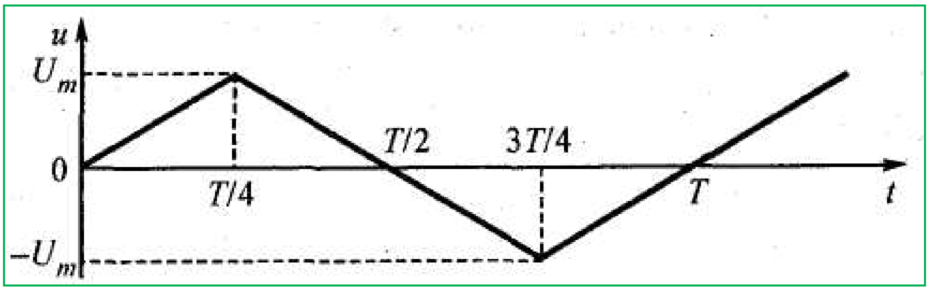
Мысал 2. Электрлік тізбекке түсірілген кернеудің уақытқа тәуелділік графигі 5 суретте көрсетілген. Um = 3,14 В; w, = 100p рад/с.

2. Кернеудің графигін пайдалана отырып Фурье қатарының төрт мүшесінің

Төмендегі тапсырмаларды орындау керек:

1. Тізбекке түсірілген кернеудің теңдеуін тауып, Mathcad пакеті көмегімен графигін салу керек.

қосындысы түріндегі шешімдерін графиктік және сандық түрдегі шешімін табу керек.

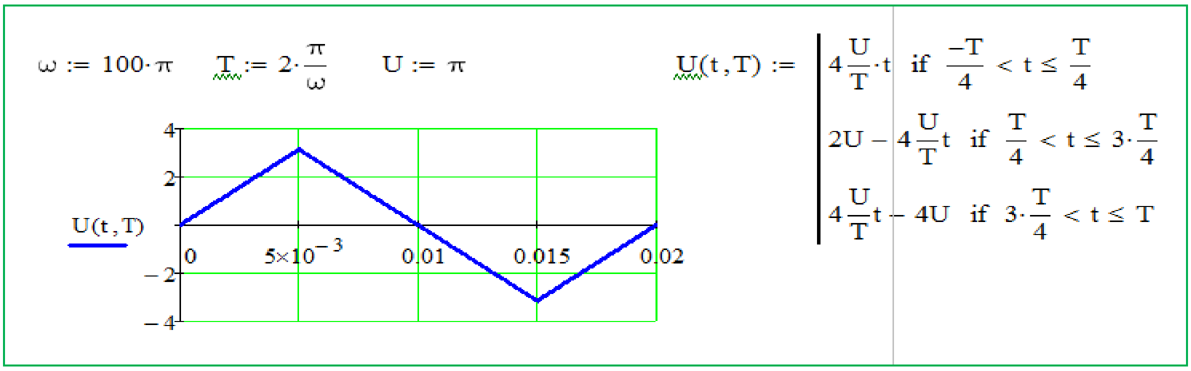


Сурет 5 - Периодты кернеудің уақытқа тәуелділік графигі

Тапсырмалардың орындалу барысында функцияның тақтығы ескеріледі:

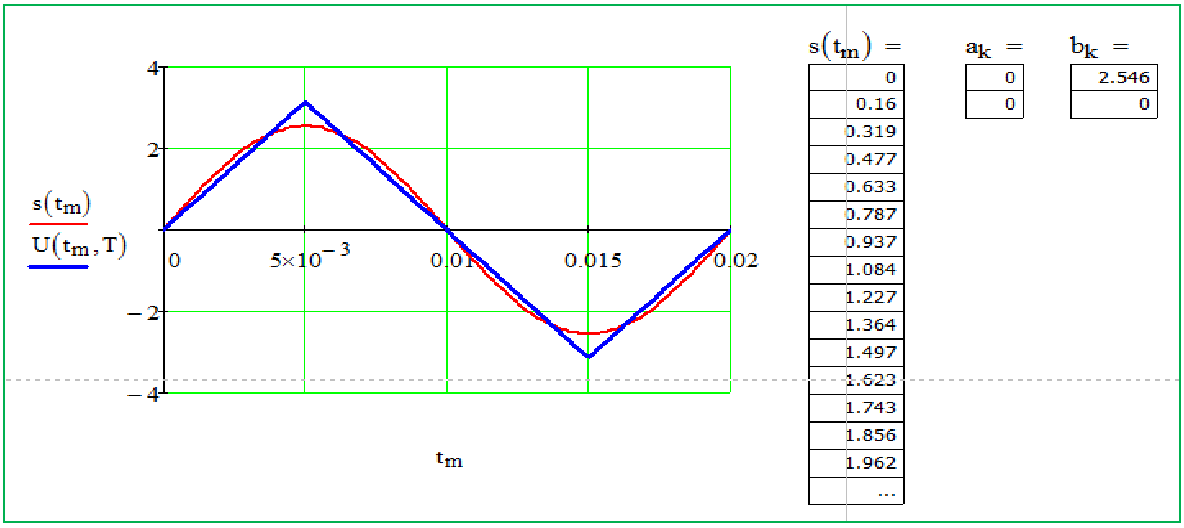
1. Кернеудің теңдеуі $U(t) = \frac{4U_m}{T}t$, мұнда –T/2 £ t £ T/2

және аталған функция периодты U(t) = U(t+T). 5 суретте Mathcad пакеті көмегімен графигі салынған.

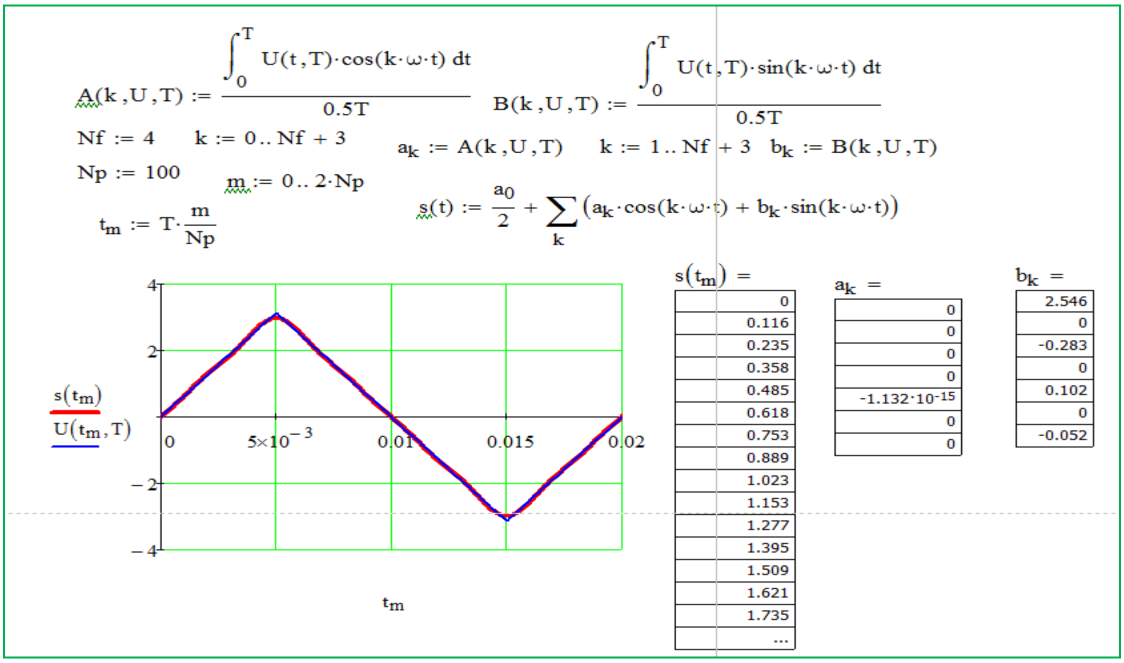


Сурет 6 - Периодты кернеудің Mathcad пакеті көмегімен салынған уақытқа тәуелділік графигі

2. Кернеу функциясын Фурье қатарына жіктеу үшін Mathcad пакетін қолданамыз. Mathcad пакеті көмегімен графиктік және сандық шешімдерін табамыз (Сурет 7,8):



Сурет 7 – Фурье қатарына жіктелген қатардың алғашқы мүшесінің графиктік және сандық шешімдері (U (t) = 0 + 2,546sin100pt).



Сурет 8 – Фурье қатарына жіктелген қатардың алғашқы төрт мүшесінің қосындысының графиктік және сандық шешімдері (Nf: = 4).

$\mathrm{U(t)} = \frac{4U_m}{T}t$ функциясы тақ болғандықтан, оның Фурье қатарына жіктелуінде тек қана синустар ғана болады, яғни $\mathrm{U(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t)$ және $a_0 = 0$

8 суреттегі графиктік және сандық шешімдердің мәліметтерін пайдалана отырып төмендегі қатарды алғашқы төрт мүше үшін жаза аламыз:

$$U(t) = 0 + 2{,}54\sin 100\pi t - 0{,}283\sin 300\pi t + 0{,}102\cos 500\pi t - 0{,}052\cos 700\pi t + \cdots$$

Таблицада $s(t_m)$ = өрнегінен кейін бір период уақыт ішіндегі 100 нүктеге сәйкес келетін $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosn\omega_1 t + b_n sinn\omega_1 t)$ теңдеуінің сан мәндері, немесе кернеудің мәндері берілген (N_p := 100) Таблицадағы мәндер Фурье қатарының алғашқы төрт мүшесінің қосындысының сандық шешімі болып табылады.

Теориялық шешім мынандай түрде болады:

$$U(t) = \frac{8U}{\pi^2}\left(\sin 100\pi t - \frac{1}{9}\sin 300\pi t + \frac{1}{25}\sin 500\pi t - \frac{1}{49}\sin 700\pi t + \cdots\right)$$

Алынған нәтижелерді талқылау және қорытынды

Периодты электрлік сигналдарды зерттеуге арналған математикалық әдістердің негізгі түріне функцияларды Фурье қатарына жіктеу тәсілі жатады. Дрихле шартына сүйене отырып гармониялық емес периодты функцияларды зерттеу мәселесі жан-жақты қарастырылды. Электрлік сигналдарды зерттеуде Фурье қатарын қолдану Mathcad пакеті көмегімен іске асқан. Периодты электр сигналдарының гармониялық анализінің нәтижелері графиктік, сандық және аналитикалық түрде берілген. Периодты функциялар түрінде берілген электрлік сигналдарды Фурье қатарына жіктеген кездегі алынған мүшелердің қосындысын есептеуге арналған әдіс қарастырылған [9-13].

Зерттеуіміздің негізгі нысандары электромагниттік объектілер болды. Осы жүйелердегі болатын электрлік периодты тебелістер MathCad қолданбалы программалар пакеті көмегімен сандық әдістер негізінде зерттелді. Электрлік құбылыстарды сандық әдіспен зерттей отырып мынандай нәтижелер алдық:

1. Тізбекке түсірілген периодты кернеудің уақытқа тәуелділік графигін Mathcad пакеті көмегімен салынды.
2. Периодты кернеудің Фурье қатарының алғашқы бірнеше мүшелерінің қосындысы түріндегі U(t) өрнегін табылды;
3. Ангармоникалық электр тербелісі Фурье қатарларына жіктеліп, олардың қосындылары график түрінде бейнеленді.

Әдебиеттер тізімі

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. — М.: «Мир», 1965. — Т. 1. – 616 с.
2. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении, т.1–2. Мир, М., 1985. – 264 с.
3. Берикханова Г.Е., Анияров А.А., Каримова Г.К. Фурье қатары, Фурье түрлендіруі және оның қолданылуы – арнайы курс, Семей 2007ж, 157 б
4. Очков В. MathCAD 14 для студентов, инженеров и конструкторов. – Санкт-Петербург. – 2007.- 370 с.
5. Кирьянов Д. Mathcad 14 в подлиннике. Санкт-Петербург. – 2007.- 682 с.
6. Воробьев Н.Н. Теория рядов. 4 издание, перераб. и доп. - М.: Наука, 1979. - 408 с.
7. Жук В.В., Натансон Г.И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.- 188 с.
8. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов.- М.: Наука, 1971. – 736 с.
9. Murzalinov D., Akilbekov A., Dauletbekova A., Vlasukova L., Makhavikov M.,Zdorovets M. Structurial transformations of S-rich SiNx film on Si via swift heavy ions irradiation. // Materials Research Express .- 2018.-Vol. 5. – Iss.3.- № 035035 (Impact- factor - 1,06)
10. Murzalinov D., Vlasukova L., Parkhomenko I., Komarov F., Akilbekov A., Mudryi A., Ryabikin Y., Romanov I., Giniyatova Sh., Dauletbekova A. Luminescence of silicon nitride films implanted with nitrogen ions // Materials Research Express .- 2018.-Vol. 5(9). - № 096414 (Impact- factor - 1,2)
11. B.A.Mukushev, M. Beresnev ,O. V. Bondar. Comparison of Tribological Characteristics of Nanostructured TiN, MoN, and TiN/MoN Arc-PVD Coatings // Journal of Friction and Wear, 2014, Vol. 35, No. 5, pp. 374–382. © Allerton Press, Inc., 2014. (Impact- factor - 0,75)

References

1. Zygmund A. Trigonometric series. - Moscow: "The World", 1965. - T. 1. - 616 p.
2. Edwards R. Fourier series in the current exposition, Vol.1-2. Mir, Moscow, 1985. - 264 p.
3. Berikhanova GE, Aniyarov AA, Karimova G.K. Fourier series. Fourier transforms and their applications. Special course. Families. - 2007. - 157 p.
4. Ochkov V. MathCAD 14 for students, engineers and designers. - St. Petersburg. - 2007.- 370 p.
5. Kiryanov D.A. Mathcad 14 in the original. St. Petersburg. - 2007.- 682 p.
6. Vorobiev N.N. Theory series. 4th Edition, Revised. and ext. - M .: Nauka, 1979 - 408 p.
7. Zhuk V.V., Natanson G.I. Trigonometric Fourier series and elements of the theory of approximation. L .: Publishing House of Leningrad. University Press, 1983.- 188 p.

8. Bermant A.F. Aramanovich I.G. Short course of mathematical analysis for vtuzov.- M .: Nauka, 1971. - 736 p.
9. Murzalinov D., Akilbekov A., Dauletbekova A., Vlasukova L., Makhavikov M.,Zdorovets M. Structurial transformations of S-rich SiNx film on Si via swift heavy ions irradiation. // Materials Research Express .- 2018.-Vol. 5. – Iss.3.- № 035035 (Impact- factor - 1,06)
10. Murzalinov D., Vlasukova L., Parkhomenko I., Komarov F., Akilbekov A., Mudryi A., Ryabikin Y., Romanov I., Giniyatova Sh., Dauletbekova A. Luminescence of silicon nitride films implanted with nitrogen ions // Materials Research Express .- 2018.-Vol. 5(9). - № 096414 (Impact- factor - 1,2)
11. B.A.Mukushev, M. Beresnev ,O. V. Bondar. Comparison of Tribological Characteristics of Nanostructured TiN, MoN, and TiN/MoN Arc-PVD Coatings // Journal of Friction and Wear, 2014, Vol. 35, No. 5, pp. 374–382. © Allerton Press, Inc., 2014. (Impact- factor - 0,75)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПРИКЛАДНОГО ПАКЕТА MATHCAD

Мукушев Б.А.
Казахский агротехнический университет им.С.Сейфуллина

Резюме

Исследование ангармонических периодических электрических колебаний или сигналов является одной из важных проблем электротехники и радиотехники. В настоящее время вопросы электрических сигналов стали глубоко изучаться в теории информации. В статье рассматривается некоторые вопросы разложения периодических функций в ряды Фурье с точки зрения высшей математики. По условиям Дирихле периодическая функция использовалась в определенных интервалах, в котором функция имеет максимальную и минимальную величину. Изложены результаты разложения функций в ряды Фурье, описывающих элетрические сигналы в различных цепях. Применение численных методов реализовано с помощью пакета Mathcad. Раскрыты особенности разложения в ряд Фурье четных и нечетных функций. Представлены графические, численные и аналитические решения гармонического анализа периодических и не периодических функций. Предложен метод расчета суммы членов ряда Фурье для периодических функций.

Ключевые слова. Ряды Фурье, численные методы, пакет Mathcad, условие Дирихле, периодические электрические сигналы, гармонические колебания, четные и нечетные функции, графики напряжений, коэффициенты ряда.

RESEARCH OF PERIODIC ELECTRICAL SIGNALS USING THE MATHCAD APPLICATION PACKAGE

Mukushev B.A
S.Seifullin Kazakh Agrotechnical University,

Summary

The study of anharmonic periodic electrical oscillations or signals is one of the important problems of electrical and radio engineering. Currently, the issues of electrical signals have become deeply studied in the theory of information. The article deals with some questions of decomposition of periodic functions into Fourier series from the point of view of higher mathematics. Under Dirichlet conditions, the periodic function was used at certain intervals. In which the function has a maximum and minimum value. The results of decomposition of functions into Fourier series are presented. These functions describe electrical signals in various circuits. The application of numerical methods is implemented using the Mathcad package. The features of the Fourier series expansion of even and odd functions are revealed. Graphical, numerical, and analytical solutions for harmonic analysis of periodic and non-periodic functions are presented. A method for calculating the sum of the terms of the Fourier series for periodic functions is proposed.

Keyword. Fourier series, numerical methods, Mathcad package, Dirichlet condition, periodic electrical signals, harmonic oscillations, even and odd functions, stress graphs, series coefficients.